TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

JOONAS VESA

KVATERNIANALYYSIN SOVELTAMISTA REUNA-ARVO-ONGELMIIN

Diplomityö

Tarkastajat: Professori Sirkka-Liisa Eriksson, Tutkijatohtori Heikki Orelma
Tarkastajat ja aihe hyväksytty luonnontieteiden tiedekuntaneuvoston kokouksessa
9. maaliskuuta 2016

ABSTRACT

JOONAS VESA: **Quaternionic Analysis Applied to Boundary Value Problems**
Tampere University of Technology
Master of Science thesis, 85 pages
May 2016
Master's Degree Programme in Science and Engineering
Major: Mathematics
Examiners: Professor Sirkka-Liisa Eriksson and Postdoctoral Researcher Heikki Orelma
Keywords: quaternion, quaternionic analysis, boundary value problem

Quaternionic analysis generalizes the concepts of complex analysis into four dimensions. Strong integral formulas can be considered as one of the strengths of quaternionic calculus. These formulas have direct applications in the study of boundary value problems.

In this thesis the basic results of quaternionic calculus are presented. The most significant concepts in this work are quaternion valued functions, some differential and integral operators, and a few elementary integral theorems. Some of the most usual function spaces of quaternionic functions are introduced and a couple of the basic theorems of functional analysis are applied to these spaces. The main objective of this thesis is to introduce the machinery to study boundary value problems.

At the end of this work quaternionic analysis is applied to the vector Laplace equation. We show that there exists a unique solution to the problem.

TIIVISTELMÄ

JOONAS VESA: Kvaternianalyysin soveltamista reuna-arvo-ongelmiin
Tampereen teknillinen yliopisto
Diplomityö, 85 sivua
Toukokuu 2016
Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma
Pääaine: Matematiikka
Tarkastajat: professori Sirkka-Liisa Eriksson ja tutkijatohtori Heikki Orelma
Avainsanat: kvaterni, kvaternianalyysi, reuna-arvo-ongelma

Kvaternianalyysin voidaan ajatella laajentavan kompleksianalyysin menetelmiä neljään ulottuvuuteen. Kvaternianalyysin vahvuutena voidaan pitää esimerkiksi vahvoja integraalikaavoja, joita on mahdollista soveltaa melko suoraan erilaisiin reuna-arvo-ongelmiin.

Tässä työssä esitellään kvaternianalyysin perustuloksia. Tarkastelun kohteena ovat kvaterniarvoiset funktiot, jotkin derivaatta- ja integraalioperaattorit, sekä näiden avulla lausutut integraalikaavat. Tässä työssä esitellään myös yleisimpiä kvaternifunktioavaruuksia, sekä sovelletaan joitakin funktionaalianalyysin perustuloksia näihin avaruuksiin. Pääasiallisena tavoitteena on koota reuna-arvo-ongelmien tutkimiseen tarvittavaa koneistoa.

Tämän työn loppupuolella kvaternianalyysin menetelmiä sovelletaan vektoriaaliseen Laplace-yhtälöön. Osoitamme, että ongelmalle on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu.

ALKUSANAT

Tämä työ tehtiin Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan laitoksella työskentelevien professori Sirkka-Liisa Erikssonin ja tutkijatohtori Heikki Orelman ohjauksessa lukuvuoden 2015-2016 aikana.

Haluan kiittää ohjaajiani mielenkiintoisesta aiheesta, sekä kommenteista ja palautteesta työn aikana. Kiitän äitiäni ja mummiani kannustuksesta ja tuesta opintojeni aikana.

Tampere, 20.5.2016

Joonas Vesa

SISÄLLYS

TERMIT JA SYMBOLIT

$^{\perp}$	ortogonaalikomplementti, s. 64
$\Vert\cdot\Vert_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)}$	kvaternifunktion L^p-normi, s. 15
$\Vert\cdot\Vert_{W^{k,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)}$	kvaternifunktion Sobolev-normi, s. 15
$\Vert\cdot\Vert_R$	kertojaoperaattorilla painotetun sisätulon indusoima normi, s. 63
$(\cdot,\cdot)_2$	kvaterniarvoinen sisätulo, s. 60
$(\cdot,\cdot)_R$	kvaterniarvoinen kertojaoperaattorilla painotettu sisätulo, s. 61
$(\cdot,\cdot)_{R,Re}$	reaaliarvoinen kertojaoperaattorilla painotettu sisätulo, s. 73
$A_{\mathbb{H}}(\Omega)$, $\ker D_l$	säännöllisten kvaternifunktioiden avaruudet, s. 18
$C^k_{\mathbb{H}}(\Omega)$	sileiden kvaternifunktioiden avaruudet, s. 14
Δ	vektoriaalinen Laplace-operaattori, s. 18
D_l	vasemmanpuoleinen Dirac-operaattori, s. 16
D_r	oikeanpuoleinen Dirac-operaattori, s. 17
$\frac{\partial}{\partial x_i}$	osittaisderivaatta, s. 15
$\frac{\partial}{\partial x_i}$	heikko osittaisderivaatta, s. 15
$e(y-x)$	Cauchy-ydin, s. 28
F_Γ	Cauchy-Bitsadze -operaattori, s. 28
$\mathbb{H}$	kvaternien joukko, s. 6
$\ker D_l$, $A_{\mathbb{H}}(\Omega)$	säännöllisten kvaternifunktioiden avaruudet, s. 18
$L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)$	p-integroituvien kvaternifunktioiden avaruudet, s. 14
$L^p_{\mathbb{H},\mathrm{loc}}(\Omega)$	lokaalisti p-integroituvien kvaternifunktioiden avaruudet, s. 14
$\lim_{\substack{t\to x \\ x\in\mathcal{N}^{\pm}}}$	ei-tangentiaalinen raja-arvo, s. 56
$\mathbb{N}$	luonnollisten lukujen joukko
∇	gradientti, s. 12
$\oplus$	vektoriavaruuksien suora summa s. 9
$\oplus$,$\oplus^{\perp}$	aliavaruuksien suora/ortogonaalinen summa s. 64
$\oplus_R$,$\oplus^{\perp}_R$	aliavaruuksien suora/ortogonaalinen summa sisätulon R suhteen s. 66
R	kertojaoperaattori, s. 61
$\mathbb{R}$	reaalilukujen joukko
$\mathbb{R}^n$	euklidinen n-uloitteinen koordinaattiavaruus
S_Γ	Singulaarinen Cauchy-integraalioperaattori, s. 55
T_Ω	Teodorescu-muunnos, s. 28
$W^{k,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)$	kvaternifunktioiden Sobolev-avaruudet, s. 14
$W^{k,p}_{\mathbb{H},\mathrm{loc}}(\Omega)$	kvaternifunktioiden lokaalit Sobolev-avaruudet, s. 14
$\mathring{W}^{k,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)$	reunalla häviävien kvaternifunktioiden Sobolev-avaruudet, s. 65

1. JOHDANTO

Tämän työn tarkoituksena on esitellä kolmiuloitteisessa euklidisessa avaruudessa kvaterniarvoisten funktioiden analyysiä. Tavoitteena on päästä tutkimaan kvaternianalyysin menetelmin vektoriaalista Laplace-yhtälöä ja osoittaa, että tehtävälle on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu.

1.1 Kvaternianalyysi

Kvaternit laajentavat kompleksilukujen ideoita neljään ulottuvuuteen. Kvaternit löysi Irlantilainen matemaatikko ja teoreettinen fyysikko William Rowan Hamilton vuonna 1843 [12] [24, s. 265]. Klassinen merkintätapa on kirjoittaa kvaternit muodossa $\mathbf{x} = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$, missä kertoimet x_i ovat reaalisia. Yhteenlasku määritellään komponenteittain ja kertolaskun muistisäännöksi kelpaa sääntö

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1.$$

Kvaternianalyysi tutkii kvaternimuuttujien- tai kvaterniarvoisten funktioiden ominaisuuksia [10, s. 11]. Monet kompleksianalyysistä tutut käsitteet, kuten funktion analyyttisyys, ja lauseet, kuten Cauchyn integraalikaava, yleistyvät omilla tavoillaan kvaternianalyysin puolelle. Tässä työssä tulemme näkemään tästä esimerkkejä. Kompleksi- ja kvaternianalyysien yleistyksenä voidaan pitää Cliffordin analyysiä, jota on käsitelty melko syvällisesti teoksessa [4].

1.2 Työn sisältö

Tämän työn alussa esitellään lyhyesti kvaternien algebra reaalisen vektoriavaruuden päälle rakennettuna. Sen jälkeen esitellään joitakin kvaterniarvoisten funktioiden avaruuksia ja määritellään Dirac-tyyppinen derivaattaoperaattori. Dirac-operaattorin avulla voidaan hajottaa perinteisiä toisen asteen derivaattaoperaattoreita ensimmäisen asteen operaattoreiksi. Tämän jälkeen määritellään kaksi integraalioperaattoria: Teodorescu-muunnos ja Cauchy-Bitsadze -operaattori, jotka niin sanottu Borel-Pompeiun integraalikaava sitoo toisiinsa. Kyseinen lause osoittautuu erittäin käyttökelpoiseksi kaavaksi tämän työn kannalta.

Työn keskivaiheilla avataan integraalioperaattorien ominaisuuksia lisää. Operaattorien jatkuvuusominaisuuksia tarkastellaan Lebesguen ja Sobolevin avaruuksissa ja osoitetaan, että Dirac-operaattori on toisen integraalioperaattorin vasen käänteisoperaattori. Työn loppupuolella neliöintegroituvien kvaternifunktioiden avaruus esitellään Hilbert-avaruutena, joka hajotetaan ortogonaaliseksi hajotelmaksi. Muodostunutta koneistoa hyödynnetään lopuksi Laplacen reuna-arvo-ongelman tutkimisessa. Ongelma on muotoa

$$\begin{cases} \Delta u = -f, & \text{alueessa } \Omega, \\ u = g, & \text{reunalla } \Gamma, \end{cases}$$

missä f ja g ovat tunnettuja vektorikenttiä ja u on ratkaistava kenttä. Osoitamme, että ongelmalle on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu sopivien oletusten ollessa voimassa.

1.3 Työn suhde lähdemateriaaliin

Tämän työn luonne on kirjallisuusselvitys, jonka pääasiallisina kirjallisuuslähteinä käytetään Klaus Gürlebeckin ja Wolfgang Sprössigin kirjoja *Quaternionic Analysis and Elliptic Boundary Value Problems* ([10]) ja *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers* ([11]). Nämä kirjat sisältävät soveltavaa kvaterni- ja Clifford-analyysiä. Teosten ominaispiirteinä mainittakoon kirjojen sovellukset erityisesti fysikkaalisten ongelmien osittaisdifferentiaaliyhtälöihin liittyen. Myös Gürlebeckin, Habethan ja Sprössigin kirjaa *Holomorphic Functions in the Plane and n-dimensional Space* ([9]) hyödynnetään tässä työssä paljon. Algebrallisessa osuudessa hyödynnämme erityisesti Sudberyn teosta [25] ja Louneston kirjaa [16].

Tämän työn suhde lähdekirjoihin [10] ja [11] osoittautuu ongelmalliseksi. Tässä työssä irtaudutaan näiden lähteiden määritelmistä integraalioperaattorien etumerkkien osalta luvusta 5 alkaen. Koska operaattorien avulla lausutut integraalikaavat aiotaan esittää samassa muodossa kuin näissä lähteissä, tullaan samalla väittäneeksi lähteiden esitystä epäkonsistentiksi. Väitettä perustellaan integraalikaavojen todistuksin, sekä muuhun lähdeaineistoon tehdyin viittauksin.

Toinen merkittävä poikkeus lähteisiin [10] ja [11] nähden tehdään määriteltäessä yleistetty Dirac-operaattori luvussa 5.3. Tässä työssä yleistys tehdään muotoilemalla Dirac-operaattorille malli kvaternisesta Gaussin lauseesta. Määritelmä poikkeaa lähteistä [10] ja [11] etumerkillä. Yleistyksen johdonmukaisuutta todistellaan näyttämällä, että klassinen komponenteittain määritelty Dirac-operaattori on sen erikoistapaus ja Sobolev-avaruuksissa määritelmät ovat yhtäpitävät. Samalla huomataan lähteiden [10] ja [11] esitysten olevan joiltakin osin epäjohdonmukaisia.

Kolmas poikkeus lähteisiin [10] ja [11] verrattuna tehdään työn loppupuolella. Esittelemme neliöintegroituvien kvaternifunktioiden avaruuteen eräänlaisen painotetun sisätulon, jonka suhteen avaruus jaetaan kahden ortogonaalisen aliavaruuden suoraksi summaksi. Tulemme kuitenkin todistaneeksi lähdekirjoista poikkeavan hajotelman, minkä jälkeen todistamme lähdekirjoissa esitellyn dekomposition vääräksi vastaesimerkein. Avoimia kysymyksiä avaruuden hajotelmaan liittyen pohditaan lyhyesti luvun 6 lopussa, sekä yhteenvedossa.

2. ALGEBRALLINEN PERUSTA

Tämän luvun tarkoituksena on esitellä lyhyesti kvaternien algebra ja luetella tärkeimmät laskusäännöt, joita tarvitaan tulevissa luvuissa. Todistukset pääosin sivuutetaan.

2.1 Kvaternien algebra

Määritellään kvaternien algebra esittelemällä se reaalisena vektoriavaruutena, johon määritellään kertolasku. Tässä työssä käytetään tummennettuja merkintöjä abstrakteista vektoreista, abstrakteista kvaterneista, sekä kantavektoreista. Nuolella korostettuja merkintöjä saatetaan käyttää eroteltaessa eri avaruuksien vektoreita.

Määritelmä 2.1.1. ([21, *s*.5]) Olkoon $\mathbb{F}$ kunta. Joukko V on $\mathbb{F}$-*kertoiminen lineaariavaruus*, jos avaruuteen on määritelty laskutoimitukset $+ : V \times V \to V$ ja $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$, jotka toteuttavat ehdot

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$, jokaisella $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,
2. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$, jokaisella $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$,
3. on olemassa $\mathbf{0} \in V$, joka toteuttaa $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$, jokaisella $\mathbf{x} \in V$,
4. Jokaista $\mathbf{x} \in V$ kohti on olemassa $-\mathbf{x} \in V$, joka toteuttaa $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$,
5. $1_{\mathbb{F}}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, jokaisella $\mathbf{x} \in V$,
6. $a(b\mathbf{x}) = (ab)\mathbf{x}$, jokaisella $\mathbf{x} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{F}$,
7. $(a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$, jokaisella $\mathbf{x} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{F}$,
8. $a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}$, jokaisella $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ja $a \in \mathbb{F}$.

Tällöin joukon V alkioita kutsutaan vektoreiksi. Lineaariavaruutta merkitään vektoreiden joukon symbolilla.

Määritelmä 2.1.2. ([21, s.4]) Lineaariavaruus V on *normiavaruus*, jos se on varustettu kuvauksella $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, joka toteuttaa ehdot

1. $\|\mathbf{x}\| = \mathbf{0}$ jos ja vain jos $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
2. $\|a\mathbf{x}\| = |a| \, \|\mathbf{x}\|$, jokaisella $a \in F$ ja $\mathbf{x} \in V$,
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, jokaisella $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Tällöin kuvausta $\|\cdot\|$ kutsutaan normiksi.

Jätettäessä normiavaruuden aksiooma 1. pois, kyseessä on seminormiavaruus ja vastaavasti kuvausta $\|\cdot\|$ kutsutaan seminormiksi.

Määritelmä 2.1.3. ([25, s.175]) Reaalinen vektoriavaruus A on *reaalinen algebra*, jos se on varustettu kertolaskulla $A \times A \to A$, joka toteuttaa ehdot

1. $(\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{z} = \mathbf{xz} + \mathbf{yz}$, jokaisella $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in A$.
2. $\mathbf{z}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{zx} + \mathbf{zy}$, jokaisella $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in A$.
3. $\alpha(\mathbf{xy}) = (\alpha\mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{x}(\alpha\mathbf{y})$, jokaisella $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Vektoria $\mathbf{1} \in A$ kutsutaan *ykkösalkioksi*, jos
4. $\mathbf{1x} = \mathbf{x1} = \mathbf{x}$, jokaisella $\mathbf{x} \in A$.

   Algebra on *assosiatiivinen*, jos
5. $(\mathbf{xy})\mathbf{z} = \mathbf{x}(\mathbf{yz})$ jokaisella $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in A$.

   Algebra on *kommutatiivinen*, jos
6. $\mathbf{xy} = \mathbf{yx}$ jokaisella $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$.

Määritelmä 2.1.4. ([22, s.5]) Assosiatiivinen algebra on *jakoalgebra*, jos se sisältää ykkösalkion $\mathbf{1} \in A$ ja jokaista nollasta poikkeavaa alkiota $\mathbf{q} \in A$ kohden on olemassa alkio $\mathbf{q}^{-1} \in A$, joka toteuttaa ehdon

$$\mathbf{q}\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^{-1}\mathbf{q} = \mathbf{1}.$$

Tällöin alkiota $\mathbf{q}^{-1} \in A$ kutsutaan alkion $\mathbf{q}$ *käänteisalkioksi.*

Määritellään seuraavaksi kvaternit.

Määritelmä 2.1.5. ([25, s.176]) Olkoon $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ reaalisen vektoriavaruuden V kanta. *Kvaterneilla* tarkoitetaan avaruutta V varustettuna bilineaarisella tulolla, joka toteuttaa laskusäännöt

1. $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = -\mathbf{e}_0$,
2. $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$,
3. $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = 0$, kun $i, j = 1, 2, 3$ ja $i \neq j$,
4. $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_i$, kun i=0,1,2,3.

Kvaternilla on tällöin esitys $\mathbf{a} = a_0\mathbf{e}_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$, missä kertoimet ovat reaalilukuja. Merkitään $\mathrm{Re}(\mathbf{a}) = a_0\mathbf{e}_0$ ja $\mathrm{Im}(\mathbf{a}) = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$. Usein merkitään myös $\mathbf{a} = \mathrm{Re}(\mathbf{a}) + \mathrm{Im}(\mathbf{a}) = a_0 + \overrightarrow{a}$, missä ns. reaaliosa ja vektoriosa on eroteltuina ja alkio $\mathbf{e}_0$ jätetty kirjoittamatta. Merkitään kvaternien algebraa symbolilla $\mathbb{H}$.

Kanta-alkioiden tulot voidaan ilmaista myös seuraavanlaisena taulukkona:

	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$

Taulukko on yhtäpitävä kanta-alkioiden tulon määritelmän kanssa.

Otetaan käyttöön merkinnät

$$\mathrm{Re}(\mathbb{H}) = \{a\mathbf{e}_0 \in \mathbb{H} : a \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathrm{Im}(\mathbb{H}) = \{b\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2 + d\mathbf{e}_3 \in \mathbb{H} : b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Tällöin Re($\mathbb{H}$) ja Im($\mathbb{H}$) ovat aliavaruuksia vektoriavaruudessa $\mathbb{H}$, sillä ne ovat epätyhjiä ja lisäksi suljettuja yhteenlaskun ja skalaarilla kertomisen suhteen. Koska vektorin esitys kannassa on yksikäsitteinen, on mielivaltaisen kvaternin esitys $a_0 + \overrightarrow{a}$ yksikäsitteinen, kun $a_0 \in \mathrm{Re}(\mathbf{a})$ ja $\overrightarrow{a} \in \mathrm{Im}(\mathbf{a})$. Tällöin merkitään $\mathbb{H} = \mathrm{Re}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{Im}(\mathbb{H})$, missä $\oplus$ tarkoittaa aliavaruuksien suoraa summaa. Avaruudet $\mathbb{R}$ ja Re($\mathbb{H}$) ovat keskenään isomorfisia, sekä Im($\mathbb{H}$) ja $\mathbb{R}^3$ ovat isomorfisia. Tällöin merkitsemme $\mathrm{Im}(\mathbb{H}) \cong \mathbb{R}^3$ ja $\mathrm{Re}(\mathbb{H}) \cong \mathbb{R}$. [19, s. 49-50] [25, s. 178]

Kvaternien tulo voidaan kirjoittaa sopivin lyhennysmerkinnöin muodossa

$$\begin{aligned}\mathbf{ab} =& (a_0 + \overrightarrow{a})(b_0 + \overrightarrow{b}) \\ =& \ a_0 b_0 + a_0 \overrightarrow{b} + b_0 \overrightarrow{a} - (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b},\end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \\ \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Näille kuvauksille on voimassa vektorialgebrasta tutut laskusäännöt. [25, s. 177]

Määritelmä 2.1.6. ([25, s.178]) Kvaternin $\mathbf{q} = q_0\mathbf{e}_0 + q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3$ *konjugaatilla* tarkoitetaan kvaternia

$$\overline{\mathbf{q}} = q_0\mathbf{e}_0 - q_1\mathbf{e}_1 - q_2\mathbf{e}_2 - q_3\mathbf{e}_3$$

ja *normilla* reaalilukua

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}.$$

Propositio 2.1.7. ([25, s.178]) *Kvaterneille on voimassa laskusäännöt*

$$\begin{aligned}\mathbf{q}\overline{\mathbf{q}} = \overline{\mathbf{q}}\mathbf{q} = |\mathbf{q}|^2, &\qquad \overline{\mathbf{q}+\mathbf{p}} = \overline{\mathbf{q}} + \overline{\mathbf{p}}, \\ \overline{\mathbf{q}\mathbf{p}} = \overline{\mathbf{p}}\ \overline{\mathbf{q}}, &\qquad \overline{\lambda\mathbf{q}} = \lambda\overline{\mathbf{q}}, \\ |\mathbf{q}\mathbf{p}| = |\mathbf{q}|\,|\mathbf{p}|, &\qquad \mathbf{e}_0\mathbf{q} = \mathbf{q}\mathbf{e}_0 = \mathbf{q}, \\ \overline{\overline{\mathbf{q}}} = \mathbf{q}, &\qquad \mathbf{q}^{-1} = \frac{\overline{\mathbf{q}}}{|\mathbf{q}|^2},\ \mathbf{q} \neq 0,\end{aligned}$$

missä $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}$ *ja* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Todistus. Todistukset ovat hyvin suoraviivaisia ja osa niistä löytyy lähteestä [25,

s. 178]. Kvaternien algebrallisia ominaisuuksia on käsitelty myös lähteissä [14] ja [16]. □

Kvaternien algebrassa on ykkösalkio $\mathbf{e}_0$. Lisäksi kvaternien algebra on assosiatiivinen ja jokaista nollasta poikkeavaa kvaternia kohti on olemassa käänteisalkio mikä tarkoittaa, että kvaternien algebra on jakoalgebra. [25, s. 176-179]

2.2 Kvaternien olemassaolo

Kvaternien olemassaolon todentamiseksi annetaan kaksi esimerkkiä kvaterneista.

Esimerkki 2.2.1. ([*11*, *s*.5]) *Kanta-alkioiden* $\mathbf{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *ja* $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ *virittämä reaalinen algebra muodostaa kvaternien algebran, kun laskutoimitukset on määritelty tavanomaisina matriisien laskutoimituksina.*

Todistus. Kanta-alkioden virittämä avaruus on reaalinen vektoriavaruus, kun yhteenlasku ja skalaarilla kertominen määritellään matriisien yhteenlaskuna ja skalaarilla kertomisena. Matriisien kertolasku ja yhteenlasku toteuttaa distributiivisuusominaisuudet, joten kyseessä on bilineaarinen operaatio. Tarkastettavaksi jää toteuttaako kanta-alkioiden tulot kvaternien määritelmässä vaaditut ominaisuudet (Määritelmä 2.1.5).

Muodostetaan kertolaskutaulu

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array},
$$

mikä osoittaa, että kertolasku toteuttaa kvaternien algebran vaatimukset. □

Esimerkki 2.2.2. ([*16*, *s*.69]) *Tarkastellaan pareja* (a, b)*, missä* $a \in \mathbb{R}$ *ja* $b \in \mathbb{R}^3$*. Valitaan kanta-alkioiksi* $\mathbf{e}_0 = (1, 0)$*,* $\mathbf{e}_1 = (0, \overrightarrow{i})$*,* $\mathbf{e}_2 = (0, \overrightarrow{j})$ *ja* $\mathbf{e}_3 = (0, \overrightarrow{k})$*, missä* $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ *ja* $\overrightarrow{k}$ *ovat avaruuden* $\mathbb{R}^3$ *luonnolliset kantavektorit. Määritellään yhteenlasku ja skalaarilla kertominen asettamalla*

$$(a, \overrightarrow{b}) + (c, \overrightarrow{d}) = (a + c, \overrightarrow{b} + \overrightarrow{d}),$$
$$\alpha(a, \overrightarrow{b}) = (\alpha a, \alpha \overrightarrow{b}),$$

missä laskutoimitukset palautuvat avaruuksien $\mathbb{R}$ *ja* $\mathbb{R}^3$ *laskutoimituksiksi. Määritellään lisäksi tulo asettamalla*

$$(a, \overrightarrow{a})(b, \overrightarrow{b}) = (ab - (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}), a\overrightarrow{b} + b\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}).$$

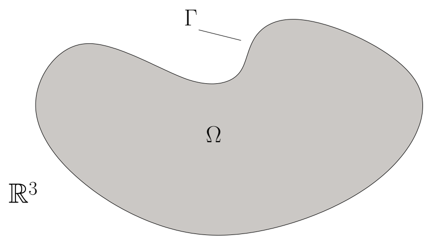
Tällöin kyseessä on kavternien algebra.

Todistus. Esimerkki on rakennettu vektoriavaruuksien $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}^3$ suoran summan $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ avulla, joka on vektoriavaruus [19, s. 95]. Lisäksi joukko $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ muodostaa avaruuteen $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ kannan. Koska olemme asettaneet vektoreille kvaternitulon, joka on yhteensopiva Määritelmän 2.1.5 kanssa, on $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ kvaternien algebra.

□

3. MÄÄRITTELYJOUKON REUNAPINNASTA JA PINTAINTEGRAALISTA

Tässä luvussa on tarkoitus esitellä lyhyesti reuna-arvo-ongelmien määrittelyä varten tarvittavan avaruuden ominaisuuksia. Rajoitutaan avaruuteen $\mathbb{R}^3$ ja tarkastellaan sen avointa, rajoitettua ja yhtenäistä osajoukkoa Ω (vertaa kuva 3.1). Lisäksi reunalle $\Gamma = \partial\Omega$ on oletettava joitakin sileysominaisuuksia. Määritellään reunan käsittelyä varten seuraava käsite.



Kuva 3.1 *Määrittelyjoukko ja sen reuna*

Määritelmä 3.1. Avoimen joukon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ reunalla Γ on $C^{k,\beta}$-*sileys*, missä $k = 0, 1, 2...$ ja $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, jos jokaista $x_0 \in \Gamma$ kohti on olemassa avoin ympäristö $B_r(x_0)$ ja bijektiivinen kuvaus $\psi^{-1} : B_r(x_0) \to D \subset \mathbb{R}^n$, jotka toteuttavat

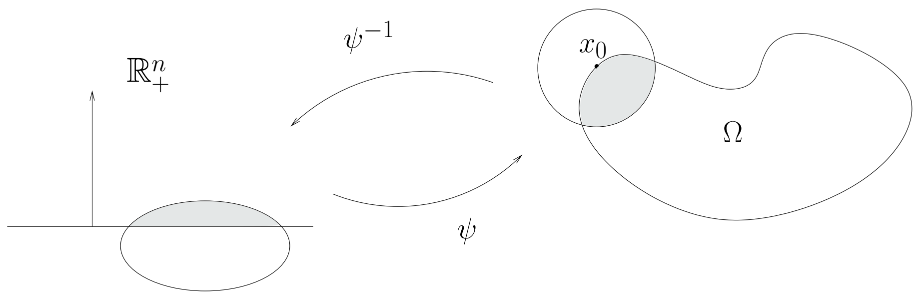
1. $\psi^{-1}(B_r(x_0) \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n \geqslant 0\}$,
2. $\psi^{-1}(B_r(x_0) \cap \Gamma) \subset \partial\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n = 0\}$,
3. $\psi^{-1} \in C^{k,\beta}(B_r(x_0)), \psi \in C^{k,\beta}(D)$ ovat (k, β)-Hölder-jatkuvia.

Hölder-jatkuvuudella tarkoitetaan, että kuvaukset ψ ja ψ^{-1} ovat k kertaa jatkuvasti derivoituvia, derivaatat ovat rajoitettuja ja jos $\beta > 0$, niin Hölderin ehto

$$\sup_{x,y \in \Omega} \left[\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\beta} \right] < \infty$$

on voimassa kuvauksille ψ ja ψ^{-1}.

Mikäli kuvaukset ψ ja niiden käänteiskuvaukset ovat $(k,0)$-jatkuvia, puhutaan C^k-*pinnoista*. *Lipschitz-pinnaksi* kutsutaan $(0,1)$-jatkuvaa pintaa. (Vertaa kuva 3.2.)



Kuva *3.2 Havainnollistus reunapinnan kuvaajista*

Lause 3.2. ([3, s.174 − 175]) *Olkoon* $V \subset \mathbb{R}^n$ *ja olkoon* $\bigcup_i V_i$ *avoin peite joukolle* V*. On olemassa hyvin määritelty ykkösen ositus, eli kokoelma äärettömän monta kertaa jatkuvasti derivoituvia funktioita* $\varphi_i : V \to [0,1]$*, jotka toteuttavat ehdot:*

- *Jokaisella pisteellä* $x \in V$ *on avoin ympäristö, missä vain äärellisen monta funktiota* φ_i *poikkeaa nollasta.*
- *Jokaisessa pisteessä* $x \in V$ *on voimassa*

$$\sum_i \varphi_i(x) = 1.$$

- *Kuvausten* φ_k *ja avointen joukkojen* V_k *indeksijoukot ovat yhteensopivat. Toisin sanoen* $supp(\varphi_k) \subset V_k$ *on voimassa jokaisella indeksin* k *arvolla.*

Määritelmä 3.3. ([1, s.114]) Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avoin ja rajoitettu joukko, jonka reuna Γ on C^k-pinta, missä $k \geqslant 1$. Merkitään pintaa esittäviä kuvauksia $\psi_j : D_j \to \Gamma_j$, missä $\Gamma_j \subset \Gamma$ ja $D_j \subset \mathbb{R}^2$. Jos mitallisen funktion $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ kantaja sisältyy joukkoon Γ_j, asetetaan

$$\int_\Gamma f(x)dS = \int_{D_j} f(\psi_j(y))\,|J(y)|\,dy,$$

missä kuvaus J on pinta-alamuutosta kuvaava Jacobin determinantti

$$J(y) = \left| \frac{\partial \psi_j}{\partial(x_1, x_2)} \right|.$$

Mitallisten funktioiden integraali reunan Γ yli määritellään kuvausten $\{\psi_j\}$ kanssa yhteensopivan ykkösen osituksen $\{\varphi_j\}$ kanssa asettamalla

$$\int_\Gamma f(x)dS = \sum_j \int_{\Gamma_j} \varphi_j f(x)dS.$$

Voimme liittää pinnalle Γ mitta-avaruuden käsitteen. Kuvaus

$$A(B) = \int_\Gamma \chi_B dS$$

on hyvin määritelty mitta, sillä pinnan Γ kuvaukset $\{\psi_j\}$ palauttavat mitta-avaruuden käsitteen avaruudelle $\partial\mathbb{R}^n_+$ ja kuvaus $|J|$ on mitallinen.

Reaaliarvoisen funktion f gradientti palautuu avaruuden $\mathbb{R}^3$ luonnollisessa kannassa $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ muotoon

$$\nabla f = \overrightarrow{e_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \overrightarrow{e_2}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \overrightarrow{e_3}\frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Vastaavasti merkinnällä $\nabla\cdot$ tarkoitetaan

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3},$$

kun funktio F on vektoriarvoinen.

Koko työn kannalta tärkeimmäksi integraalikaavaksi osoittautuu Gaussin lause.

Lause 3.4. ***(Gauss)*** ([*3*, s.446]) *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avoin, rajoitettu ja yhtenäinen joukko, jolla on (paloittain) C^1-reunapinta. Olkoon $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ derivoituva joukossa Ω ja jatkuva reunalla Γ. Tällöin*

$$\int_\Omega \nabla \cdot F dV = \int_\Gamma F \cdot n \; dS,$$

missä n tarkoittaa ulkonormaalia reunalla Γ.

Valitsemalla $F_1 = (f, 0, 0)$, $F_2 = (0, f, 0)$ ja $F_3 = (0, 0, f)$ ja kirjoittamalla Gaussin kaavaa 3.4 auki, saadaan

$$\int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dV = \int_\Omega \nabla \cdot F_i dV = \int_\Gamma F_i \cdot n \; dS = \int_\Gamma n_i(x) f(x) dS.$$

Tämä versio Gaussin lauseesta on tulevien lukujen kannalta erittäin hyödyllinen.

Seuraus 3.5. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avoin, rajoitettu ja yhtenäinen joukko, jolla on (paloittain) C^1-reunapinta. Olkoon $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ derivoituva joukossa Ω ja jatkuva reunalla Γ. Tällöin*

$$\int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dV = \int_\Gamma n_i(x) f(x) dS,$$

missä n_i tarkoittaa pinnan Γ yksikköulkonormaalivektorin i:nnettä komponenttia.

4. KVATERNIARVOISET FUNKTIOT

Reaaliarvoisista funktioavaruuksista tämän työn kannalta tärkeimpiä ovat k kertaa jatkuvasti derivoituvien funktioiden avaruudet $C^k_{\mathbb{R}}(\Omega)$, integroituvien funktioiden avaruudet $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega)$, lokaalisti integroituvien funktioiden avaruudet $L^p_{\mathbb{R},\mathrm{loc}}(\Omega)$, sekä Sobolevin avaruudet $W^{k,p}_{\mathbb{R}}(\Omega)$ ja $W^{k,p}_{\mathbb{R},\mathrm{loc}}(\Omega)$. Tässä luvussa otetaan käyttöön kyseiset funktioavaruudet kun määritellään kvaterniarvoisten funktioiden funktioavaruuksia.

4.1 Avaruuksien määrittely komponenttifunktioiden avulla

Ajatuksena on määritellä kvaterniarvoiset funktioavaruudet komponenttifunktioiden kautta. Tästä eteenpäin tekstissä ei esiinny abstrakteja vektoreita eikä kvaterneja samaan tapaan kuin algebrallisessa osuudessa, joten tummennettuja tai nuolella korostettuja merkintöjä käytetään vain kantavektoreista.

Määritelmä 4.1.1. ([11, s.36]) Olkoon joukko $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avoin. Funktioavaruudet $C^k_{\mathbb{H}}(\Omega)$, $L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)$, $L^p_{\mathbb{H},\mathrm{loc}}(\Omega)$, $W^{k,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)$ ja $W^{k,p}_{\mathbb{H},\mathrm{loc}}(\Omega)$ koostuvat muotoa

$$f : x \to f_0(x) + f_1(x)\mathbf{e}_1 + f_2(x)\mathbf{e}_2 + f_3(x)\mathbf{e}_3$$

olevista funktioista, missä komponenttifunktiot f_i, kun $i = 0, 1, 2, 3$, kuuluvat vastaaviin reaaliarvoisten funktioiden avaruuksiin $C^k_{\mathbb{R}}(\Omega)$, $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega)$, $L^p_{\mathbb{R},\mathrm{loc}}(\Omega)$, $W^{k,p}_{\mathbb{R}}(\Omega)$ ja $W^{k,p}_{\mathbb{R},\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Nämä avaruudet ovat lineaariavaruuksia vastaavaan tapaan kuin reaaliset vastineensa. Tulkitsemalla kvaternit reaalisena vektoriavaruutena, voidaan useampiulotteisesta analyysistä tuoda hyödyllisiä käsitteitä kvaternianalyysiin.

Oletetaan joukko $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avoimeksi. Funktio $f : \Omega \to \mathbb{H}$ on derivoituva pisteessä

$x_0 \in \Omega$, jos on olemassa lineaarikuvaus $J : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}$, joka toteuttaa

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - J(h)|_{\mathbb{H}}}{\|h\|_{\mathbb{R}^3}} = 0.$$

Määritellään kvaterniarvoiselle funktiolle $f : \Omega \to \mathbb{H}$ klassinen osittaisderivaatta pisteessä $x \in \Omega$ asettamalla

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + t\overrightarrow{e_i}) - f(x)}{t},$$

missä $t \in \mathbb{R}$ ja merkintä $\overrightarrow{e_i}$ viittaa $\mathbb{R}^3$-avaruuden i:nteen kantavektoriin. Merkintä $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ on mielekäs ainoastaan raja-arvon ollessa olemassa. Määritelmä palautuu komponenttifunktioille muotoon

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\mathbf{e}_j.$$

Sobolevin avaruuksissa kyse on heikoista derivaatoista. Tässä työssä ei erotella klassisia ja heikkoja osittaisderivaattoja merkinnällisesti, vaan tulkinnan annetaan riippua tarkasteltavasta funktioavaruudesta.

Lebesguen ja Sobolevin avaruuksille määritellään seuraavat normit. Olkoon $1 \leqslant p < \infty$. Avaruuden $L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)$ normilla tarkoitetaan kuvausta $\|\cdot\|_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)} : L^p_{\mathbb{H}}(\Omega) \to \mathbb{R}$, missä

$$\|f\|_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

ja avaruuden $W^{k,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)$ normilla kuvausta

$$\|f\|_{W^{k,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)} = \left(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant k} \int_\Omega \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{\alpha_3} f \,\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

missä multi-indeksi $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ käy läpi heikot derivaatat ehdolla $0 \leqslant |\alpha| \leqslant k$, kun $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Nämä avaruudet ovat Banach-avaruuksia [10, s. 13].

4.2 Säännölliset funktiot

Kvaterniarvoisen funktion osittaisderivaattojen määritelmästä seuraa melko suoraan seuraava tulosääntö.

Propositio 4.2.1. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avoin. Jos funktioilla $u : \Omega \to \mathbb{H}$ ja $v : \Omega \to \mathbb{H}$ on olemassa osittaisderivaatat muuttujan x_i suhteen, niin*

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Todistus. Koska komponenttifunktioille pätee tulosääntö, saadaan tulos kirjoittamalla auki tuloa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(uv)}{\partial x_i} &= \sum_{k,p=0}^{3} \frac{\partial(u_k v_p)}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_p \\
&= \sum_{k,p=0}^{3} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} v_p + u_k \frac{\partial v_p}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_p \\
&= \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \sum_{p=0}^{3} v_p \mathbf{e}_p + \sum_{k=0}^{3} u_k \mathbf{e}_k \sum_{p=0}^{3} \frac{\partial v_p}{\partial x_i} \mathbf{e}_p \\
&= \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$

□

Seuraavaksi määritellään kvaternifunktioille eräänlainen derivaatan käsite.Määrittelemme sopivat differentiaalioperaattorit, joita kutsumme Dirac-operaattoreiksi.

Määritelmä 4.2.2. ([10, s.14]) Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avoin. Olkoon funktio $f : \Omega \to \mathbb{H}$ derivoituva (tai $f \in W^{1,p}_{\mathbb{H},\mathrm{loc}}(\Omega)$). Asetetaan

$$D_l f = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

Tätä operaattoria kutsutaan *vasemmanpuoleiseksi Dirac-operaattoriksi.* Sobolevin avaruudessa derivaatat tulkitaan heikkoina derivaattoina.

Määritelmä 4.2.3. ([10, s.14]) Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avoin. Olkoon funktio $f : \Omega \to \mathbb{H}$ derivoituva (tai $f \in W^{1,p}_{\mathbb{H},\mathrm{loc}}(\Omega)$). Asetetaan

$$D_r f = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbf{e}_i,$$

Tätä operaattoria kutsutaan *oikeanpuoleiseksi Dirac-operaattoriksi.* Sobolevin avaruudessa derivaatat tulkitaan heikkoina derivaattoina.

Mikäli erikseen ei muuta mainita, Dirac-operaattorilla tarkoitetaan vasemmanpuoleista operaattoria.

Määritellään Dirac-operaattorien konjugaatit asettamalla

$$\begin{aligned} \overline{D_l} &= \sum_{i=1}^{3} \overline{\mathbf{e}_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = -\sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \\ \overline{D_r} &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\mathbf{e}_i} = -\sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Tällöin ne toteuttavat laskusäännöt

$$\begin{aligned} \overline{D_l}\ \overline{f} &= \overline{D_r f}, \\ \overline{D_r}\ \overline{f} &= \overline{D_l f}. \end{aligned}$$

Tämä on yksinkertaista nähdä kirjoittamalla

$$\overline{D_l}\ \overline{f} = \sum_{\substack{i=1 \\ j=0}}^{3} \overline{\mathbf{e}_i}\ \overline{\mathbf{e}_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \sum_{\substack{i=1 \\ j=0}}^{3} \overline{\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \overline{D_r f},$$

missä kantavektoreille on käytetty Propositiossa 2.1.7 esiteltyä konjugaattien laskusääntöä. Jälkimmäinen kaava on täysin vastaava.

Propositio 4.2.4. *Sobolevin avaruuksissa operaattorit D_l ja D_r ovat kuvauksia*

$$\begin{aligned} W^{k+1,p}_{\mathbb{H}}(\Omega) &\to W^{k,p}_{\mathbb{H}}(\Omega), \\ W^{k+1,p}_{\mathbb{H},\mathrm{loc}}(\Omega) &\to W^{k,p}_{\mathbb{H},\mathrm{loc}}(\Omega), \end{aligned}$$

missä $k \geqslant 0$.

Todistus. Koska operaattorit derivoivat komponenttifunktioita kerran ja avaruudet on määritelty komponenttien avulla, heikkojen derivaattojen olemassaolo ja integroituvuusominaisuudet seuraavat suoraan reaalisten avaruuksien määritelmistä.

□

Määritelmä 4.2.5. ([10, s.14]) Derivoituva funktio (tai Sobolev-derivoituva funktio) on *säännöllinen*, jos $D_l u = 0$. Merkitään säännöllisten klassisesti derivoituvien funktioiden joukkoa symbolilla $A_{\mathbb{H}}$ ja säännöllisten funktioiden joukkoa merkinnällä $\ker D_l$. Vastaavasti u on oikealta säännöllinen, jos $D_r u = 0$.

Kirjoitetaan auki $W^{1,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)$-funktio operoituna Dirac-operaattorilla. Saadaan

$$\begin{aligned}
D_l f &= \frac{\partial f_0}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial f_0}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial f_0}{\partial x_3}\mathbf{e}_3 \\
&\quad - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3 \\
&= \nabla f_0 - \operatorname{div}\overrightarrow{f} + \operatorname{rot}\overrightarrow{f},
\end{aligned}$$

kun käytetään lyhennysmerkintöjä ∇, div ja rot. Vastaava tulos on voimassa derivoituville funktioille. Toisaalta operoitaessa kahdesti Dirac-operaattorilla, saadaan seuraava propositio.

Lause 4.2.6. ([*10*, s.15]) *Olkoon* $f \in W^{2,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)$ *(tai kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva), missä* Ω *on avoin. Tällöin*

$$D_l D_l f = -\Delta f.$$

Todistus. Testifunktioiden sileydestä seuraa heikkojen derivaattojen kommutointi.

Väite seuraa laskemalla

$$\begin{aligned}
D_l D_l f &= \sum_{i,j=1}^{3} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\
&= -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\right) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\
&= -\Delta f + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{\substack{i,j=1\\ j<i}}^{3} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\
&= -\Delta f + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{\substack{i,j=1\\ j<i}}^{3} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \\
&= -\Delta f.
\end{aligned}$$

□

Tätä lausetta voitaisiin pitää motivaationa kvaternialgebran ja Dirac-operaattorin määrittelyille. Dirac-operaattorin voitaisiin katsoa olevan muodollinen neliöjuuri negatiivisesta Laplace-operaattorista. Toisenlainen motivaatio kvaterniarvoisten derivaattaoperaattorien määrittelylle voisi olla Cauchy-Riemann -systeemien yleistäminen.

Halutaan tutkia myös miten Dirac-operaattori operoi kvaternien tuloon.

Lause 4.2.7. ([*10*, *s*.24]) *Olkoon funktiot u, v derivoituvia avoimessa joukossa Ω. Tällöin*

$$D_l(uv) = (D_l u)v + \overline{u}(D_l v) - 2\sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Tätä lausetta kutsutaan yleistetyksi Leibnizin säännöksi.

Todistus. Todistus mukailee lähdettä [10, s. 24]. Kirjoittamalla tulo uv operoituna

Dirac-operaattorilla ja käyttämällä tulosääntöä 4.2.1, saadaan

$$\begin{aligned}
D_l(uv) &= \sum_{k=1}^{3} \mathbf{e}_k \frac{\partial(uv)}{\partial x_k} \\
&= \sum_{k=1}^{3} \mathbf{e}_k \left[\frac{\partial u}{\partial x_k} v + u \frac{\partial v}{\partial x_k}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{3} \mathbf{e}_k \frac{\partial u}{\partial x_k} v + \sum_{k=1}^{3} \mathbf{e}_k u \frac{\partial v}{\partial x_k} \\
&= (D_l u)v + \underbrace{\sum_{\substack{i=0\\k=1}}^{3} u_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_i \frac{\partial v}{\partial x_k}}_{=:s} .
\end{aligned}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned}
s &= \sum_{k,i=1}^{3} u_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_i \frac{\partial v}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{3} u_0 \mathbf{e}_k \frac{\partial v}{\partial x_k} \\
&= -\sum_{\substack{k,i=1\\k\neq i}}^{3} u_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \frac{\partial v}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{3} u_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{3} u_0 \mathbf{e}_k \frac{\partial v}{\partial x_k} \\
&= -\sum_{k,i=1}^{3} u_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \frac{\partial v}{\partial x_k} + 2\sum_{i=1}^{3} u_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{3} u_0 \mathbf{e}_k \frac{\partial v}{\partial x_k} \\
&= \left(u_0 - \sum_{i=1}^{3} u_i \mathbf{e}_i\right) \sum_{k=1}^{3} \mathbf{e}_k \frac{\partial v}{\partial x_k} - 2\sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \\
&= \overline{u}(D_l v) - 2\sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i},
\end{aligned}$$

mistä väite seuraa. □

Huomautus 4.2.8. Jos funktiot u ja v ovat derivoituvia avoimessa joukossa Ω ja $Im(u) = 0$, niin

$$D_l(uv) = (D_l u)v + u(D_l v).$$

Tämä huomautus seuraa suoraan edellisestä lauseesta. Leibnizin kaavan avulla on helppoa laskea joitakin derivaattoja. Tarkastellaan esimerkiksi funktiota $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to$

$\mathbb{H}$, joka on muotoa
$$f(x) = \frac{x}{|x|^3},$$
missä $x = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ ja $x \neq 0$. Funktio f on säännöllinen. Lasketaan osoittajan ja nimittäjän derivaatat erikseen ja käytetään Leibnitzin kaavaa. Ensinnäkin

$$D_l x = \sum_{i,j=1}^{3} \mathbf{e}_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i}\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i^2 = -3.$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} D_l \frac{1}{|x|^3} &= \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-3/2} \\ &= \sum_{i=1}^{3} -\mathbf{e}_i \frac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-5/2} 2x_i = -3\frac{x}{|x|^5}. \end{aligned}$$

Käyttämällä Leibnizin kaavaa, saadaan

$$\begin{aligned} D_l \frac{x}{|x|^3} &= D_l\left(\frac{1}{|x|^3}\right)x + \frac{1}{|x|^3}D_l x \\ &= -3\frac{xx}{|x|^5} - 3\frac{1}{|x|^3} \\ &= 3\frac{\overline{x}x}{|x|^5} - 3\frac{1}{|x|^3} = 0. \end{aligned}$$

Toisaalta funktio f on säännöllinen myös oikeanpuoleisen Dirac-operaattorin suhteen.

Cauchyn ydin on funktio $e : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{H}$, joka määritellään asettamalla

$$e(x) = \frac{-x}{4\pi |x|^3}.$$

Tätä funktiota tullaan käyttämään tulevien lukujen integraalioperaattoreissa. Cauchyn ydin on selvästi säännöllinen määrittelyalueessaan. Tärkeänä huomiona mainittakoon, että tämä funktio on perusratkaisu operaattoreille D_l ja D_r [4, s. 51].

5. INTEGRAALIOPERAATTOREITA

Tässä luvussa on tarkoitus käydä lävitse Borel-Pompeiu -integraalikaava, sekä siitä johdetut tärkeimmät klassiset integraalikaavat. Samalla määritellään kaksi tärkeää integraalioperaattoria, jotka esiintyvät Borel-Pompeiun kaavassa. Tämän jälkeen tavoitteena on käydä läpi integraalioperaattoreiden ominaisuuksia Lebesguen ja Sobolevin avaruuksissa. Tarkastelun seurauksena huomataan, että Dirac-operaattori on toisen integraalioperaattorin vasen käänteisoperaattori. Lopuksi Borel-Pompeiu -kaava yleistetään Sobolevin avaruuksiin.

5.1 Integraalien perusominaisuuksia ja määritelmiä

Aloitetaan tarkastelu esittelemällä kvaterniarvoisten integraalien perusominaisuuksia.

Määritelmä 5.1.1. ([9, s.338]) Olkoon $f \in L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)$, missä $p \geqslant 1$. Määritellään kvaterniarvoisen funktion integraali komponenteittain asettamalla

$$\int_\Omega f dx = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{e}_i \int_\Omega f_i dx.$$

Funktio f on integroituva, jos

$$\int_\Omega |f|\, dx < \infty.$$

Integroituvuuden määritelmä on yhteensopiva komponenttifunktioiden integroituvuuden kanssa, sillä kvaterninormille voidaan kirjoittaa arvio

$$\int_\Omega |f|\, dx \leqslant \int_\Omega \sum_{i=0}^{3} |f_i|\, dx = \sum_{i=0}^{3} \int_\Omega |f_i|\, dx,$$

mistä nähdään, että jos komponenttifunktiot ovat integroituvia, niin kvaternifunktio on integroituva. Toisaalta jos kvaternifunktio on integroituva, niin erityisesti

$$\int_\Omega |f_i|\, dx \leqslant \int_\Omega |f|\, dx$$

pätee jokaiselle komponentille f_i, missä $i = 0, 1, 2, 3$. Tällöin komponenttifunktiot ovat integroituvia.

Lemma 5.1.2. ([*9*, *s*.338]) *Olkoon Ω mitallinen joukko. Tällöin kvaternifunktioiden integraaleille on voimassa yhtälöt:*

1. *(Kvaternilineaarisuus) Olkoon funktiot $f, g : \Omega \to \mathbb{H}$ mitallisia ja olkoon $a, b \in \mathbb{H}$. Jos lausekkeet $\int(af + gb)$ ja $\int af + \int gb$ ovat olemassa, niin*

$$\int_\Omega (af + bg)dx = a \int_\Omega f dx + \left(\int_\Omega g dx \right) b.$$

2. *Jos $\int f$ on olemassa, niin*

$$\left| \int_\Omega f dx \right| \leqslant \int_\Omega |f|\, dx.$$

3. *Mitallisille kvaternifunktioille f on voimassa*

$$\overline{\int_\Omega f dx} = \int_\Omega \overline{f} dx.$$

4. *(Hölderin epäyhtälö). Jos $p, q \geqslant 1$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, niin*

$$\|fg\|_{L^1_{\mathbb{H}}(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)} \|g\|_{L^q_{\mathbb{H}}(\Omega)}.$$

   Väite pätee myös jos ($p = 1$ ja $q = \infty$) tai ($p = \infty$ ja $q = 1$). Tällöin ∞-normilla tarkoitetaan (oleellista) supremum-normia

$$\|f\|_{L^\infty_{\mathbb{H}}(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

   Ylärajan käsite on integroituvien funktioiden tapauksessa tulkittava oleellisena ylärajana. Reaaliluku c on oleellinen yläraja funktiolle $|f|$, jos joukko $|f|^{-1}(\{x \in \mathbb{R} : x > c\})$ on nollamittainen.

5. *(Fubinin (Tonellin) lause). Olkoon* $(\Omega_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ *ja* $(\Omega_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ *sigma-äärellisiä mitta-avaruuksia. Tällöin mitalliselle kvaternifunktiolle* $f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{H}$ *on voimassa yhtälö*

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f d\mu_1 \right) d\mu_2,$$

mikäli jompi kumpi ehdoista

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |f| \, d\mu_2 \right) d\mu_1 < \infty,$$
$$\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |f| \, d\mu_1 \right) d\mu_2 < \infty,$$

on voimassa.

Todistus.

1. Kvaterniarvoisen integraalin määritelmä, sekä reaalisen integraalin lineaarisuus tuottaa väitteen.

2. Lähteessä [9, s. 339] todistus on muotoiltu seuraavasti. Olkoon $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}$ integroituva. Jos integraalin itseisarvo on nolla, väite on selvä. Merkitään funktion f integraalia joukon Ω yli symbolilla I. Väite seuraa arviosta

$$\begin{aligned} |I| &= \frac{\overline{I}}{|I|} I = \int_\Omega \frac{\overline{I}}{|I|} f dx = \int_\Omega Re \left(\frac{\overline{I}}{|I|} f \right) dx \\ &\leqslant \int_\Omega \left| \frac{\overline{I}}{|I|} f \right| dx = \int_\Omega \left| \frac{\overline{I}}{|I|} \right| |f| \, dx = \int_\Omega |f| \, dx. \end{aligned}$$

3. Kvaterniarvoisen integraalin määritelmä, konjugaatin määritelmä, sekä reaalisen integraalin lineaarisuus tuottaa väitteen.

4. Koska kvaternifunktioiden normit on määritelty reaalisina integraaleina ottamalla integrandeiksi funktioiden itseisarvot, tavanomaiset todistukset Hölderin epäyhtälölle, kuten lähteessä [2, s. 24] esitetty todistus, yleistyvät suoraan kvaternifunktioille. Tapaus $p = 1$, $q = \infty$ on triviaali ja seuraa poimimalla integraalista $\int |f| \, |g|$ ulos (oleellinen) supremum funktiosta $|g|$.

5. Koska kvaternifunktion integroituvuus on yhtäpitävä kaikkien komponenttifunktioiden integroituvuuden kanssa, väitteet seuraavat soveltamalla Fubinin (Tonellin) lausetta [20, s. 140-144][23, s. 100 →] komponenttifunktioiden integraaleihin.

□

Propositio 5.1.3. ***(Gauss)*** ([*11*, *s*.86]) *Olkoon* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *avoin ja rajoitettu joukko ja* $\Gamma = \partial\Omega$ *(paloittain)* C^1*-pinta. Olkoon funktiot* $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{H}$ *derivoituvia joukossa* Ω *ja jatkuvia reunalla* Γ*. Tällöin*

$$\int_\Omega [(D_r f)g + f(D_l g)]\, dV = \int_\Gamma fngdS,$$

missä $n = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$ *tarkoittaa pinnan* Γ *yksikköulkonormaalia.*

Todistus. Todistus seuraa lähteessä [11, s. 86] esitettyä todistusta. Kirjoitetaan vasenta puolta auki ja käytetään tulosääntöä ja Gaussin lauseetta 3.5. Tällöin

$$\begin{aligned}
\int_\Omega [(D_r f)g + f(D_l g)]\, dV &= \int_\Omega \sum_{p=1}^{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_p}\mathbf{e}_p g + f\mathbf{e}_p \frac{\partial g}{\partial x_p} \right) dV \\
&= \int_\Omega \sum_{\substack{i,j=0\\p=1}}^{3} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_p g_j \mathbf{e}_j + f_i\mathbf{e}_i\mathbf{e}_p \frac{\partial g_j}{\partial x_p}\mathbf{e}_j \right) dV \\
&= \sum_{\substack{i,j=0\\p=1}}^{3} \int_\Omega \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_p} g_j + f_i \frac{\partial g_j}{\partial x_p} \right) dV\ \mathbf{e}_i\mathbf{e}_p\mathbf{e}_j \\
&= \sum_{\substack{i,j=0\\p=1}}^{3} \int_\Omega \frac{\partial (f_i g_j)}{\partial x_p} dV\ \mathbf{e}_i\mathbf{e}_p\mathbf{e}_j \\
&= \sum_{\substack{i,j=0\\p=1}}^{3} \int_\Gamma f_i n_p g_j dS\ \mathbf{e}_i\mathbf{e}_p\mathbf{e}_j \\
&= \int_\Gamma fngdS.
\end{aligned}$$

□

Seuraavaa versiota kvaternisesta Gaussin lauseesta hyödynnetään työn loppupuolella. Koska kaavan molemmat Dirac-operaattorit ovat vasemmanpuoleisia, lause osoittautuu hyödylliseksi yleistettäessä Diracin operaattoria. Huomattava yksityiskohta on yhtälön vasemmalla puolella olevien integrandien vastakkaiset etumerkit.

Seuraus 5.1.4. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avoin ja rajoitettu joukko ja $\Gamma = \partial\Omega$ (paloittain) C^1-pinta. Olkoon funktiot $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{H}$ derivoituvia joukossa Ω ja jatkuvia reunalla Γ. Tällöin*

$$\int_\Omega \left[\overline{(D_l f)} g - \overline{f}(D_l g)\right] dV = -\int_\Gamma \overline{f} n g dS,$$

missä $n = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$ tarkoittaa pinnan Γ yksikköulkonormaalia.

Todistus. Gaussin lauseen 5.1.3 oletukset ovat voimassa, joten kirjoitetaan sen avulla yhtälön oikeaa puolta auki ja käytetään konjugaattien laskusääntöjä, jotka on esitelty sivuilla 7 ja 17. Tällöin

$$\begin{aligned} -\int_\Gamma \overline{f} n g dS &= -\int_\Omega \left[(D_r \overline{f}) g + \overline{f}(D_l g)\right] dV \\ &= \int_\Omega \left[-(D_r \overline{f}) g - \overline{f}(D_l g)\right] dV \\ &= \int_\Omega \left[(\overline{D_r}\, \overline{f}) g - \overline{f}(D_l g)\right] dV \\ &= \int_\Omega \left[(\overline{D_l f}) g - \overline{f}(D_l g)\right] dV. \end{aligned}$$

□

Vastaava kaava löydetään myös oikeanpuoleiselle Dirac-operaattorille.

Seuraus 5.1.5. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avoin ja rajoitettu joukko ja $\Gamma = \partial\Omega$ (paloittain) C^1-pinta. Olkoon funktiot $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{H}$ derivoituvia joukossa Ω ja jatkuvia reunalla Γ. Tällöin*

$$\int_\Omega \left[(D_r f)\overline{g} - f(\overline{D_r g})\right] dV = \int_\Gamma f n \overline{g} dS,$$

missä $n = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$ tarkoittaa pinnan Γ yksikköulkonormaalia.

Todistus. Gaussin lauseen 5.1.3 oletukset ovat voimassa, joten kirjoitetaan sen avulla yhtälön oikeaa puolta auki ja käytetään konjugaattien laskusääntöjä, jotka on esitelty sivuilla 7 ja 17. Tällöin

$$\begin{aligned}\int_\Gamma fn\overline{g}dS &= \int_\Omega [(D_rf)\overline{g} + f(D_l\overline{g})]\, dV \\ &= \int_\Omega [(D_rf)\overline{g} - f(-D_l\overline{g})]\, dV \\ &= \int_\Omega \left[(D_rf)\overline{g} - f(\overline{D_l}\ \overline{g})\right] dV \\ &= \int_\Omega \left[(D_rf)\overline{g} - f(\overline{D_rg})\right] dV. \qquad \square\end{aligned}$$

Valitsemalla edellisten kaavojen pintaintegraaleista funktioita ykkösfunktioiksi, löydetään vielä lisää versioita Gaussin kaavasta. Emme käy niitä läpi, mutta toteamme erään yleisesti käytetyn.

Seuraus 5.1.6. ([*10*, *s.*78]) *Olkoon* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *avoin ja rajoitettu joukko ja* $\Gamma = \partial\Omega$ *(paloittain)* C^1*-pinta. Olkoon funktiot* $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{H}$ *derivoituvia joukossa* Ω *ja jatkuvia reunalla* Γ. *Tällöin*

$$\int_\Omega D_l f dV = \int_\Gamma nfdS,$$

missä $n = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$ *tarkoittaa pinnan* Γ *yksikköulkonormaalia.*

Todistus. Valitaan funktioksi f Lauseessa 5.1.3 funktio $f = \mathbf{e}_0$. Tällöin $D_rf = 0$ ja Lause 5.1.3 palautuu väitteenä olevaksi lausekkeeksi.

$\square$

Määritellään seuraavaksi kaksi integraalioperaattoria. Operaattorien määritelmissä esiintyy funktio $e(y-x)$ ja muuttujien x ja y järjestys määrää operaattorien etumerkit. Poikkeamme lähteistä [10, s. 26] ja [11, s. 76,87] etumerkkien kohdalla, jotta saamme todistettua haluamamme versiot integraalikaavoista. Samalla tulemme väittäneeksi, että näissä lähdeteoksissa merkkivirheet heijastelevat $e(y-x)$-funktion mukana useaan lauseeseen. Lähdevertailua voi tehdä seuraavien määritelmien ja integraalikaavojen osalta esimerkiksi teoksiin [4, s. 53], [6, s. 147,148], [8, s. 101] ja [9, s. 129-131], mutta käytettyjen algebrojen kanssa on syytä olla huolellinen.

Määritelmä 5.1.7. Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ on avoin, yhtenäinen, rajoitettu ja $\Gamma = \partial\Omega$ on (paloittain) C^1-pinta. Määritellään *Cauchyn ydin* $e : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{H}$ asettamalla

$$e(x) = \frac{-x}{4\pi\,|x|^3},$$

missä $x = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$. Olkoon

$$(F_\Gamma u)(x) = \int_\Gamma e(y-x)n(y)u(y)dy$$
$$(T_\Omega u)(x) = -\int_\Omega e(y-x)u(y)dy,$$

missä funktio $n = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$ on pinnan Γ yksikköulkonormaali. Integrointi tapahtuu molemmissa tapauksissa muuttujan y suhteen. Operaattoria F kutsutaan *Cauchy-Bitsadze* -operaattoriksi ja operaattoria T kutsutaan *Teodorescu-muunnokseksi.*

Teodorescu-muunnos on olemassa sopivien oletusten ollessa voimassa. Etsitään nyt ensimmäinen arvio Teodorescu-integraalille. Oletetaan aluksi funktio $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{H}$ jatkuvaksi.

Lemma 5.1.8. ([*10*, s.52]) *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu ja olkoon funktio $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{H}$ p-integroituva, kun $p > 3$. Tällöin $T_\Omega u$ on olemassa joukossa Ω ja*

$$|(T_\Omega u)(x)| \leqslant \frac{R^{3-2q}}{3-2q}\,\|u\|_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)},$$

missä $R = \sup\{\|x-y\| : x, y \in \Omega\}$.

Todistus. Todistus perustuu lähteen [10, s. 52] todistukseen.

Käyttämällä Hölderin epäyhtälöä, Teodorescu-muunnos saa arvion

$$
\begin{aligned}
|(T_\Omega u)(x)| &= \left| \int_\Omega \frac{1}{4\pi} \frac{y-x}{|y-x|^3} u(y) dy \right| \\
&\leqslant \int_\Omega \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|y-x|^2} |u(y)|\, dy \\
&\leqslant \left(\frac{1}{4\pi} \int_\Omega \frac{1}{|y-x|^{2q}} dy \right)^{1/q} \|u\|_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)} .
\end{aligned}
$$

Jatkuvuuden takia funktion u normi on äärellinen rajoitetussa joukossa. Valitaan $1 \leqslant q < 3/2$, arvioidaan integraalia ylöspäin muokkaamalla integrointijoukkoa ja tehdään lopuksi muuttujanvaihto. Tällöin

$$
\frac{1}{4\pi} \int_\Omega \frac{1}{|y-x|^{2q}} dy \leqslant \frac{1}{4\pi} \int_{B_R(x)} \frac{1}{|y-x|^{2q}} dy = \int_0^R r^{2-2q} dr = \frac{r^{3-2q}}{3-2q} < \infty,
$$

missä joukko $B_R(x) \supset \Omega$ on R-säteinen, x-keskeinen pallo.
Valitsemalla $R = \sup\{\|x-y\| : x, y \in \Omega\}$, vakio R ei riipu x:n arvosta. □

5.2 Klassisia integraalikaavoja

Reuna-arvo-ongelmia tarkasteltaessa seuraava integraalikaava, jota kutsutaan Borel-Pompeiu -integraalikaavaksi, osoittautuu hyvinkin hyödylliseksi. Pyritään näyttämään kaava sileille funktioille ja huolehditaan sen yleistämisestä Sobolevin avaruuksiin myöhemmin. Tarkastellaan myös Borel-Pompeiun kaavan erilaisia seurauksia yleistäen samalla kompleksista Cauchyn kaavaa kvaternifunktioille.

Lause 5.2.1. ***(Borel-Pompeiu)*** ([*11*, *s.*86]) *Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ on avoin, yhtenäinen ja rajoitettu ja $\Gamma = \partial\Omega$ on (paloittain) C^1-pinta. Olkoon funktio $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{H}$ jatkuvasti derivoituva joukossa Ω ja jatkuva reunalla Γ. Tällöin*

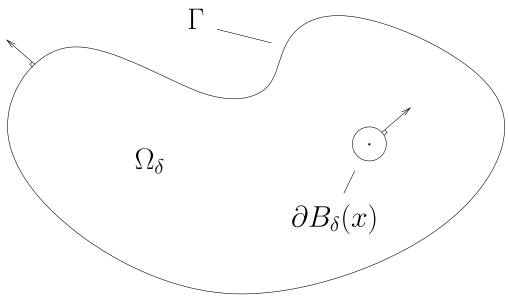
$$
(F_\Gamma u)(x) + (T_\Omega D_l u)(x) = \begin{cases} u(x), & \text{kun } x \in \Omega, \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}. \end{cases}
$$

Todistus. Todistus mukailee lähteessä [11, s. 87] olevaa todistusta korjaten samalla sen etumerkkejä käyttämällä integraalioperaattoreille vastakkaismerkkisiä määritelmiä. Samaan tapaan lähteen [10, s. 28] etumerkkejä korjataan. (Vertaa Määritelmää 5.1.7 edeltäviin huomautuksiin.) Oletetaan, että $x \in \Omega$. Koska funktiolla $e(y-x)$ on singulaarisuus kohdassa $y = x$, eristetään piste tarkastelemalla aluetta $\Omega \backslash B_\delta(x) =: \Omega_\delta$. Tämä voidaan tehdä, koska Ω on avoin, eli jokaisella pisteellä $x \in \Omega$ on δ-ympäristö $B_\delta(x) \subset \Omega$. Lisäksi funktion u jatkuvuudesta päätellään, että riittävän pienessä ympäristössä olevilla $y \in B_\delta(x)$ on voimassa $|u(y) - u(x)| < \varepsilon$, kun $\varepsilon > 0$.

Käytetään Gaussin lausetta 5.1.3, mistä seuraa

$$\int_{\Omega_\delta} [(D_r e(y-x))u(y) + e(y-x)D_l u(y)]\, dy = \int_{\partial\Omega_\delta} e(y-x)n(y)u(y)dy.$$

Jaetaan reuna $\partial\Omega_\delta$ osiinsa Γ ja $-(\partial B_\delta)$, missä ∂B_δ tarkoittaa x-keskeisen δ-pallon pintaa, jonka ulkonormaali osoittaa pisteestä x poispäin. (Vertaa kuva 5.1)



Kuva 5.1 *Reunapinnat Γ ja ∂B_δ*

Tämä vastakkainen orientaatio reunaan $\partial\Omega_\delta$ nähden otetaan huomioon etumerkeissä. Otetaan myös huomioon Cauchyn ytimen säännöllisyys $D_r e(x-y) = 0$. Tällöin yhtälö saa muodon

$$\int_{\Omega_\delta} e(y-x)D_l u(y)dy = \int_\Gamma e(y-x)n(y)u(y)dy - \int_{\partial B_\delta} e(y-x)n(y)u(y)dy.$$

Valitun δ-pallon ulkonormaali on $n(y) = \frac{y-x}{|x-y|}$. Tällöin

$$e(y-x)n(y) = \frac{\overline{y-x}}{4\pi\,|x-y|^3}\frac{y-x}{|x-y|} = \frac{1}{4\pi\,|x-y|^2} = \frac{1}{A_\delta},$$

missä A_δ tarkoittaa δ-pallon pinnan alaa. Voidaan edelleen kirjoittaa

$$\begin{aligned}\int_\Gamma e(y-x)n(y)u(y)dy - \int_{\Omega_\delta} e(y-x)D_l u(y)dy \\ &= \int_{\partial B_\delta} e(y-x)n(y)u(y)dy \\ &= \int_{\partial B_\delta} \frac{1}{A_\delta} u(y)dy \\ &= \frac{1}{A_\delta}\int_{\partial B_\delta} u(y)dy,\end{aligned}$$

mikä on haluttua muotoa, kun $\delta \to 0$. Koska operaattori $T_\Omega D_l$ on olemassa alueessa Ω, on funktio $|\chi_{\Omega_\delta} e(y-x)D_l u(y)|$ rajoitettu alueessa Ω integroituvalla funktiolla $|e(y-x)D_l u(y)|$. Soveltamalla dominoidun konvergenssin lausetta saadaan

$$-\lim_{n\to\infty}\int \chi_{\Omega_{\delta_n}} e(y-x)D_l u(y)dy = T_{\Omega\setminus\{x\}}D_l u = T_\Omega D_l u.$$

Tällöin yhtälön vasemmalla puolen esiintyy operaattorit F_Γ ja $T_\Omega D_l$. Oikea puoli lähestyy funktiota u, sillä

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{A_\delta}\int_{\partial B_\delta} u(y)dy - u(x)\right| &= \left|\frac{1}{A_\delta}\int_{\partial B_\delta}(u(y)-u(x))dy\right| \\ &\leqslant \frac{1}{A_\delta}\int_{\partial B_\delta}|u(y)-u(x)|\,dy \\ &< \frac{1}{A_\delta}\int_{\partial B_\delta}\epsilon dy \\ &< \frac{1}{A_\delta}A_\delta\epsilon = \epsilon\end{aligned}$$

funktion u jatkuvuuden takia.

Toisaalta jos $x \in \mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}$, niin pistettä x ei ole tarpeen eristää. Tässä tapauksessa

$$\int_\Omega [(D_r e(y-x))u(y) + e(y-x)D_l u(y)]\,dy = \int_{\partial\Omega} e(y-x)n(y)u(y)dy,$$

mistä väite seuraa, koska $D_r e(y-x) = 0$. □

Seuraava kaava perustuu lähteisiin [10, s. 29] ja [11, s. 88], mutta Cauchy-Bitsadze -operaattorin etumerkkiä korjataan. (Vertaa Määritelmää 5.1.7 edeltäviin huomautuksiin.)

Lause 5.2.2. ***(Cauchy)*** ([*10*, s.29]) *Oletetaan, että* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *on avoin, yhtenäinen ja rajoitettu ja* $\Gamma = \partial\Omega$ *on (paloittain)* C^1*-pinta. Olkoon funktio* $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{H}$ *säännöllinen alueessa* Ω *ja jatkuva reunalla* Γ*. Tällöin*

$$(F_\Gamma u)(x) = \begin{cases} u(x), & \textit{kun } x \in \Omega \\ 0, & \textit{kun } x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega} \end{cases}$$

Todistus. Haluttu kaava saadaan suoraan Borel-Ponpeiun kaavasta 5.2.1, missä termi $T_\Omega Du$ häviää, koska u on oletettu säännölliseksi. □

Cauchyn kaavalle saadaan vastine myös rajoitetun joukon ulkopuolelle. Määritellään seuraava raja-arvon käsite.

Jos on olemassa kvaterni $u(\infty)$ ja jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa positiivinen reaaliluku M, jotka toteuttavat

$$|u(x) - u(\infty)| < \varepsilon,$$

kun

$$\|x\| > M,$$

merkitsemme

$$\lim_{\|x\| \to \infty} u(x) = u(\infty).$$

Käytämme luvusta $u(\infty)$ ilmausta raja-arvo äärettömyydessä.

Seuraava kaava perustuu lähteisiin [10, s. 29] ja [11, s. 91], mutta Cauchy-Bitsadze -operaattorin etumerkki on vastakkainen. (Vertaa Määritelmää 5.1.7 edeltäviin huomautuksiin.)

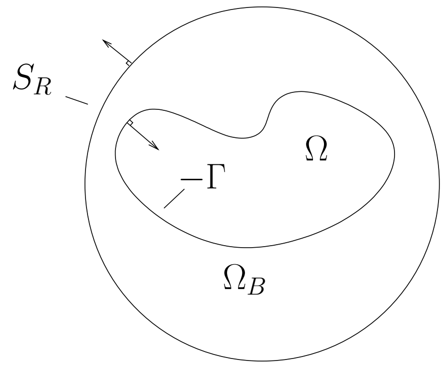
Lause 5.2.3. ***(Cauchy)*** ([*9*, s.132]) *Oletetaan, että* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *on avoin, yhtenäinen ja rajoitettu ja* $\Gamma = \partial\Omega$ *on (paloittain)* C^1*-pinta. Olkoon* u *säännöllinen funktio joukossa* $\mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$ *ja jatkuva joukossa* $\mathbb{R}^3 \backslash \Omega$*. Olkoon funktiolla* u *raja-arvo*

$\lim_{\|x\|\to\infty} u(x) = u(\infty)$. *Tällöin*

$$(F_\Gamma u)(x) = \begin{cases} -u(x) + u(\infty) & \textit{kun } x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}, \\ u(\infty), & \textit{kun } x \in \Omega. \end{cases}$$

Todistus. Todistus seuraa lähdettä [9, s. 132]. Yksinkertaistetaan merkintöjä kirjoittamalla joukko $\mathbb{R}^3 \backslash \Gamma$ osina Ω ja $\Omega^- = \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$. Oletetaan aluksi, että $x \in \Omega^-$. Koska joukko Ω on rajoitettu, x-keskeinen pallo $B_R(x)$ riittävän suurella säteellä R sisältää joukon Ω. Tarkastellaan funktiota u alueessa $\Omega_B = \Omega^- \cap B_R(x)$, missä u on säännöllinen. Käytetään Cauchyn kaavaa 5.2.2 ja annetaan pallon B_R säteen kasvaa rajatta.

Otetaan käyttöön merkinnät $\partial\Omega_B = S_R \cup -\Gamma$, missä S_R on pallon B_R pinta ja $-\Gamma$ on alueen Ω reunapinta, jonka orientaatio on käännetty. (Vertaa kuva 5.2.)



Kuva 5.2 *Reunapinnat S_R ja $-\Gamma$*

Koska $x \in \Omega_B$, Cauchyn kaavasta seuraa

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_{\partial\Omega_B} e(y-x)n(y)u(y)dy \\
&= \int_{S_R} e(y-x)n(y)u(y)dy - \int_{\Gamma} e(y-x)n(y)u(y)dy \\
&\quad + \int_{S_R} e(y-x)n(y)dy\ u(\infty) - \int_{S_R} e(y-x)n(y)dy\ u(\infty) \\
&= -(F_\Gamma u)(x) + \underbrace{\int_{S_R} e(y-x)n(y)dy\ u(\infty)}_{=:I_1} \\
&\quad \underbrace{+ \int_{S_R} e(y-x)n(y)(u(y)-u(\infty))dy,}_{=:I_2}
\end{aligned}$$

missä funktiot $n = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$ ovat pintojen yksikköulkonormaaleja. Väite seuraa tapaukselle $x \in \Omega_B$, mikäli $I_1 \to u(\infty)$ ja $I_2 \to 0$, kun säde R kasvaa rajatta.

Koska pallo $B_R(x)$ on x-keskeinen, sen ulkonormaali on

$$n(y) = \frac{y-x}{|y-x|}.$$

Lisäksi

$$e(y-x)n(y) = \frac{\overline{y-x}}{4\pi\,|y-x|^3}\frac{y-x}{|y-x|} = \frac{1}{A_{B_R}},$$

missä A_{B_R} edustaa pallon B_R pinnan alaa. Termi I_1 saa esityksen

$$\int_{S_R} e(y-x)n(y)dy\ u(\infty) = \frac{1}{A_{B_R}}\int_{S_R} dy\ u(\infty) = u(\infty),$$

mistä nähdään, että $I_1 \to u(\infty)$. Toisaalta integraalille I_2 saadaan arvio

$$\begin{aligned}
\left|\int_{S_R} e(y-x)n(y)(u(y)-u(\infty))dy\right| &= \left|\frac{1}{A_{S_R}}\int_{S_R} u(y)-u(\infty)dy\right| \\
&\leqslant \frac{1}{A_{S_R}}\int_{S_R} |u(y)-u(\infty)|\,dy \\
&\leqslant \frac{1}{A_{S_R}}\int_{S_R} \sup_{y\in S_R}|u(y)-u(\infty)|\,dy \\
&= \frac{1}{A_{S_R}}A_{S_R}\sup_{y\in S_R}|u(y)-u(\infty)|\,dy < \varepsilon,
\end{aligned}$$

jokaisella $\varepsilon > 0$, kun säde R on kyllin suuri, sillä u on jatkuva alueessa Ω^- ja $u(y) \to u(\infty)$. Siispä $I_2 \to 0$. Toisaalta todistus on voimassa myös tapaukselle $x \in \Omega$. Tällöin termi $u(x)$ häviää.

$\square$

Lause 5.2.4. ***(Väliarvolause)*** ([*10*, s.30]) *Olkoon funktio $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}$ säännöllinen ja $B_r(x) \subset \mathbb{R}^3$ avoin r-säteinen palloympäristö. Tällöin*

$$u(x) = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} u(y)dy,$$

missä $|B_r|$ tarkoittaa pallon B_r tilavuutta.

Todistus. Todistus mukailee lähteesä [11, s. 88] esitettyä todistusta, mutta Cauchy-Bitsadze -operaattorin etumerkkiä on korjattu. Merkitään $S = \partial B_r(x)$. Cauchyn integraalikaavasta 5.2.2 seuraa, että

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_S e(y-x)n(y)u(y)dy \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\overline{y} - \overline{x}}{|x-y|^3} n(y)u(y)dy \\
&= \frac{1}{4\pi r^3} \int_S (\overline{y} - \overline{x})n(y)u(y)dy,
\end{aligned}$$

missä n tarkoittaa pinnan yksikköulkonormaalia. Käytettämällä Gaussin Lausetta 5.1.3, saadaan funktio u muotoon

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{4\pi r^3} \left[\int_{B_r(x)} (D_r(\overline{y} - \overline{x}))u(y)dy + \int_{B_r(x)} (\overline{y} - \overline{x}) D_l u(y)dy \right] \\
&= \frac{1}{4\pi r^3} \int_{B_r(x)} (D_r(\overline{y} - \overline{x}))u(y)dy \\
&= \frac{1}{4\pi r^3} \int_{B_r(x)} 3u(y)dy \\
&= \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} u(y)dy,
\end{aligned}$$

sillä u on oletettu säännölliseksi ja toisaalta

$$D_r(\overline{y}-\overline{x}) = D_r(x-y) = -D_r y = -\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial y_i}{\partial y_j}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = -\delta_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = 3.$$

□

Lause 5.2.5. ***(Väliarvolause)*** ([*10*, *s*.30]) *Olkoon funktio $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}$ säännöllinen ja $B_r(x) \subset \mathbb{R}^3$ avoin r-säteinen palloympäristö. Tällöin*

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_r|}\int_{B_r(x)} u(y)dy,$$

missä $|\partial B_r|$ on r-säteisen pallon pinnan ala.

Todistus. Todistus seuraa lähdettä [11, s. 89]. Merkitään $S = \partial B_r(x)$. Käyttämällä Cauchyn kaavaa ja sijoittamalla ulkonormaali n, saadaan

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_S e(y-x)n(y)u(y)dy \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\overline{y-x}}{|y-x|^3}\frac{y-x}{|y-x|}u(y)dy \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{1}{|y-x|^2}u(y)dy \\ &= \frac{1}{4\pi r^2}\int_S u(y)dy. \end{aligned}$$

□

5.3 Operaattorin T_Ω tarkastelua integroituvien funktioiden avaruuksissa

Tarkoituksena on osoittaa Teodorescu-muunnoksen ominaisuuksia kuvauksena. Lisäksi annetaan Dirac-operaattorille määritelmä, joka on yhtäpitävä määritelmän 4.2.2 kanssa. Tämän määrittelyn avulla osoitetaan, että Dirac-operaattori D_l on Teodorescu-muunnoksen T_Ω vasen inverssi sopivien oletusten ollessa voimassa.

Aloitetaan tarkastelu avaruuden $\mathbb{R}^3$ avoimen ja rajoitetun osajoukon Ω ulkopuolelta.

Lause 5.3.1. ([*10*, s.48]) *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avoin ja rajoitettu joukko ja $u \in L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)$, missä $p \geqslant 1$. Tällöin $(T_\Omega u)(x)$ on olemassa, kun $x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$ ja $|(T_\Omega u)(x)| \to \infty$, kun $|x| \to 0$.*

Todistus. Todistus seuraa lähteessä [10, s.48] esitettyä todistusta. Koska Ω on rajoitettu, funktio u on integroituva joukossa Ω, sillä Hölderin epäyhtälön mukaan

$$\|u\|_{L^1_{\mathbb{H}}(\Omega)} \leqslant \mathrm{Vol}(\Omega)\, \|u\|_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)} < \infty,$$

missä $p > 1$ ja $q = \frac{p}{p-1}$.

Operaattorista T_Ω saadaan Hölderin epäyhtälöllä arvio

$$\begin{aligned}
|(T_\Omega u)(x)| &= \left| - \int_\Omega e(y-x)u(y)dy \right| \\
&\leqslant \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \frac{|y-x|}{|y-x|^3} |u(y)|\, dy \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \frac{1}{|y-x|^2} |u(y)|\, dy \\
&\leqslant \frac{1}{4\pi} \max_{y \in \Omega} \frac{1}{|y-x|^2} \|u(y)\|_{L^1_{\mathbb{H}}(\Omega)} < \infty,
\end{aligned}$$

sillä joukossa $\mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$ pätee $x \neq y$. Arviosta nähdään, että $|(T_\Omega u)(x)| \to 0$, kun $|x| \to \infty$. □

Propositio 5.3.2. ([*10*, s.48]) *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avoin ja rajoitettu joukko ja $u \in L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)$, missä $p \geqslant 1$. Tällöin $(T_\Omega u)(x)$ on säännöllinen joukossa $\mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$.*

Todistus. On tarkastettava millä ehdoilla derivoinnit voidaan viedä integraalin sisälle. Cauchy-ytimen säännöllisyys todistaa väitteen.

Valittaessa $x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$, kuvaus $e(y-x)u(y)$ on integroituva joukossa Ω Lauseen 5.3.1 mukaan. Lisäksi kuvaus on derivoituva muuttujan x suhteen joukossa $\mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$, sillä

Cauchy-ydin on derivoituva, kun $x \neq y$. Lasketaan derivaatat

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}\{e(y-x)\}_i &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^3}\\ &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|y-x|^3} - \frac{1}{2}\frac{2*3(x_i-y_i)^2}{|y-x|^5}\right)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}\{e(y-x)\}_j &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^3}\\ &= \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{2}\frac{2*3(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|y-x|^5}\right),\end{aligned}$$

mistä löydetään derivaatta

$$\frac{\partial}{\partial x_i}e(y-x) = \sum_{j=1}^{3}\mathbf{e}_j\frac{\delta_{ij}|y-x|^2 - 3(y_j-x_j)(y_i-x_i)}{4\pi|y-x|^5}.$$

Kun valitaan $x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega}$, niin derivaatat $\frac{\partial}{\partial x_i}e(y-x)$, missä $i = 1,2,3$, ovat rajoitettuja joukossa Ω. Rajoitetaan muuttuja x pieneen palloon $\overline{B_r(z)}$, missä $z \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega}$ ja $r > 0$ on riittävän pieni, jotta pallo ei leikkaa reunaa $\partial\Omega$. Tällöin derivaatat $\frac{\partial}{\partial x_i}e(y-x)$ ovat rajoitettuja joukossa Ω integroituvalla funktiolla.

Tarkastellaan ympäristössä $B_r(x) \subset \mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega}$ olevaa jonoa $(x + a_n\mathbf{e}_i) := (x_n) \to x$, missä $0 < a_n < r$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Derivaataksi saadaan

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\int_\Omega e(y-x_n)u(y)dy - \int_\Omega e(y-x)u(y)dy}{x_n - x}\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{e(y-x_n)-e(y-x)}{x_n-x}u(y)dy\\ &= \int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_i}(e(y-x))u(y)dy\end{aligned}$$

dominoidun konvergenssin lauseen nojalla. Operoitaessa integraalia D_l-operaattorilla, Cauchy-ytimen säännöllisyys todistaa väitteen.

$\square$

Seuraavaksi on tarkoitus tarkastella Teodorescu-muunnoksen L_p- ja ∞-normeja. Sitä ennen tarvitaan lyhyt apulause.

Lemma 5.3.3. ([*11*, s.82]) *Olkoon Ω avaruuden $\mathbb{R}^3$ rajoitettu osajoukko ja olkoon $1 \leqslant q < \frac{3}{2}$. Tällöin*

$$\int_\Omega |e(y-x)|^q \, dy \leqslant (4\pi)^{1-q} \frac{R^{3-2q}}{3-2q} \in \mathbb{R},$$

missä $R = \sup\{ \, \|x-y\|_{\mathbb{R}^3} : x, y \in \Omega\}$.

Todistus. Todistus perustuu lähteessä [11, s. 82] esitettyyn todistukseen. Cauchy-ytimelle on voimassa

$$|e(y-x)| = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|y-x|^2}.$$

Arvioidaan integraalia ylhäältä päin valitsemalla integrointialueeksi R-säteinen x-keskeinen pallo $B_R(x) \supset \Omega$, jolloin muuttujanvaihdon kautta löydetään arvio

$$\begin{aligned}\int_\Omega |e(y-x)|^q \, dy &= \frac{1}{(4\pi)^q} \int_\Omega \frac{1}{|y-x|^{2q}} dy \\ &\leqslant \frac{4\pi}{(4\pi)^q} \int_0^R r^{2(1-q)} dr \\ &= (4\pi)^{1-q} \frac{R^{3-2q}}{3-2q} \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Arvio ei riipu muuttujan $x \in \Omega$ valinnasta, kun valitaan $R = \sup\{ \, \|x-y\|_{\mathbb{R}^3} : x, y \in \Omega\}$.

□

Lause 5.3.4. ([*11*, s.82]) *Olkoon Ω avaruuden $\mathbb{R}^3$ rajoitettu osajoukko ja olkoon $3 < p < \infty$. Oletetaan lisäksi, että $u \in L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)$. Tällöin*

$$\|T_\Omega u\|_{L^\infty_{\mathbb{H}}(\Omega)} \leqslant (4\pi)^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{R^{3-2q}}{3-2q} \right)^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)},$$

missä $R = \sup\{ \, \|x-y\|_{\mathbb{R}^3} : x, y \in \Omega\}$.

Todistus. Todistus perustuu lähteessä [11, s. 82] esitettyyn todistukseen. Etsitään arvio Hölderin epäyhtälöllä ja käytetään Lemmaa 5.3.3. Oletus $3 < p < \infty$ seuraa Lemman 5.3.3 ehdosta $1 < q < \frac{3}{2}$, kun $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Teodorescu-muunnoksen itseisarvolle on voimassa

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega e(y-x)u(y)dy\right| &\leqslant \int_\Omega |e(y-x)|\,|u(y)|\,dy\\ &\leqslant \left(\int_\Omega |e(y-x)|^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_\Omega |u(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant (4\pi)^{-\frac{1}{p}}\left(\frac{R^{3-2q}}{3-2q}\right)^{\frac{1}{p}}\|u\|_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)},\end{aligned}$$

missä $-\frac{1}{p}=\frac{1-q}{q}$ ja $R=\sup\{\ \|x-y\|_{\mathbb{R}^3} : x,y\in\Omega\}$. □

Lause 5.3.5. ([*11*, *s.*82]) *Olkoon Ω avaruuden $\mathbb{R}^3$ rajoitettu osajoukko ja olkoon $1<p<\infty$. Oletetaan lisäksi, että $u\in L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)$. Tällöin*

$$\|T_\Omega u\|_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)} \leqslant R\,\|u\|_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)},$$

missä $R=\sup\{\ \|x-y\|_{\mathbb{R}^3} : x,y\in\Omega\}$.

Todistus. Todistus perustuu lähteessä [11, s. 82] esitettyyn todistukseen. Hölderin epäyhtälön mukaan on voimassa

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega e(y-x)u(y)dy\right| &\leqslant \int_\Omega |e(y-x)|\,|u(y)|\,dy\\ &= \int_\Omega |e(y-x)|^{1-\frac{1}{p}}\,|e(y-x)|^{\frac{1}{p}}\,|u(y)|\,dy\\ &\leqslant \left(\int_\Omega |e(y-x)|\,dy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_\Omega |e(y-x)|\,|u(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

missä on sievennetty $1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$. Soveltamalla Lemmaa 5.3.3 arvion ensimmäiseen osaan, saadaan

$$\left|\int_\Omega e(y-x)u(y)dy\right| \leqslant R^{\frac{1}{q}}\left(\underbrace{\int_\Omega |e(y-x)|\,|u(y)|^p\,dy}_{=:h(x)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

missä $R=\sup\{\ \|x-y\|_{\mathbb{R}^3} : x,y\in\Omega\}$. Arvio p-integraalille löydetään integroimalla arvion p:s potenssi. Funktio $h(x)$ on mitallinen ja epänegatiivinen, joten Tonellin lauseella ja Lemman 5.3.3 avulla löydetään arvio

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\int_\Omega e(y-x)u(y)dy\right|^p dx &\leqslant R^{\frac{p}{q}} \int_\Omega \int_\Omega |e(y-x)|\,|u(y)|^p\,dydx \\ &= R^{\frac{p}{q}} \int_\Omega \int_\Omega |e(y-x)|\,dx\,|u(y)|^p\,dy \\ &\leqslant R^{\frac{p}{q}+1} \int_\Omega |u(y)|^p\,dy,\end{aligned}$$

missä $\frac{p}{q}+1=p$. Väite seuraa korottamalla potenssiin $\frac{1}{p}$. □

Teodorescu-muunnokselle saatiin melko helposti arviot Lebesguen avaruuksiin. Pyrimme kuitenkin näyttämään, että integroituvan funktion Teodorescu-muunnos kuuluu eräisiin Sobolev-avaruuksiin. Tarvitsemme tätä varten arvioita myös Teodorescu-muunnoksen derivaattojen normeille. Etsitään ensin derivoituvan funktion Teodorescu-muunnoksen derivaatta, sen normille arvio, ja yleistetään arvio lopuksi koskemaan integroituvia funktioita.

Lause 5.3.6. ([9, s.153]) *Olkoon Ω avoin ja rajoitettu $\mathbb{R}^3$:n osajoukko. Olkoon jatkuva funktio $u:\overline{\Omega}\to\mathbb{H}$ jatkuvasti derivoituva joukossa Ω. Tällöin $T_\Omega u$ on derivoituva joukossa Ω ja*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(T_\Omega u)(x) = -\lim_{r\to 0}\int_{\Omega\setminus B_r(x)} \frac{\partial}{\partial x_i} e(y-x)u(y)dy + \mathbf{e}_i\frac{u(x)}{3}$$

Todistus. Eristetään piste $x\in\Omega$ ja tarkastellaan raja-arvoa

$$\lim_{r\to 0}\frac{\partial}{\partial x_i}(T_{\Omega\setminus B_r(x)}u)(x),$$

kun u on jatkuvasti derivoituva.

Mukailemme lähdettä [11, s. 78]. Lähteessä [18, s. 59→] esitetyn derivointikaavan perusteella

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(T_{\Omega\setminus B_r(x)}u)(x) = \underbrace{-\int_{\Omega\setminus B_r(x)} \frac{\partial}{\partial x_i} e(y-x)u(y)dy}_{=:I_1} + \underbrace{\int_{S_1(x)} e(y-x)(y_i-x_i)dy}_{=:I_2}\,u(y),$$

missä jälkimmäinen termi on integraali yksikköpallon $B_1(x)$ reunapinnan yli.

Integraali I_1 on haluttua muotoa. On laskettava pintaintegraali I_2 ja tarkasteltava rajankäyntiä $r \to 0$. Merkitään pinnan yksikköulkonormaalia symbolilla $n(y)$. Käyttämällä reaalista Gaussin lausetta, saadaan

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{3}\int_{S_1(x)}(y_j - x_j)(y_i - x_i)dy\mathbf{e}_j \\
&= \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{3}\int_{S_1(x)} n_j(y)(y_i - x_i)dy\mathbf{e}_j \\
&= \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{3}\int_{B_1(x)} \frac{\partial(y_i - x_i)}{\partial y_j}dy\mathbf{e}_j \\
&= \frac{1}{4\pi}\mathrm{Vol}(B_1(x))\mathbf{e}_j = \frac{\mathbf{e}_j}{3},
\end{aligned}$$

joka on haluttua muotoa. Pääarvointegraalin olemassaolon perustelee seuraavan lauseen arvio.

□

Lause 5.3.7. ([*9, s.*156]) *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu ja olkoon $1 < p < \infty$. Olkoon u jatkuva joukossa $\overline{\Omega}$ ja jatkuvasti derivoituva alueessa Ω. Operaattori $\frac{\partial}{\partial x_i}T_\Omega$ on rajoitettu arviolla*

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}T_\Omega u\right\|_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)} \leqslant C\,\|u\|_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)},$$

missä C on positiivinen reaalilukuvakio joka ei riipu funktiosta u.

Todistus. On varmistettava, että edellisessä lauseessa esitellyn derivointikaavan termit ovat L^p-rajoitettuja. Jos u on jatkuvasti derivoituva ja p-integroituva, termi $\frac{u(x)}{3}\mathbf{e}_j$ on selvästi L^p-rajoitettu jokaisella $i = 1, 2, 3$.

Pääarvointegraalitermi

$$\lim_{r\to 0}\int_{\Omega\setminus B_r(x)}\frac{\partial}{\partial x_i}e(y-x)u(y)dy$$

on haastavampi, sillä singulaarisuus on $1/r^3$-tyyppiä. Tätä termiä varten on vedottava lähteessä [5, s. 56] esiteltyyn *Calderón-Zygmund* -epäyhtälöön. Sivulla 38 olemme laskeneet Cauchy-ytimen derivaatan, joka on muotoa

$$\frac{\partial}{\partial x_i} e(y-x) = \frac{1}{|y-x|^3} \sum_{j=1}^{3} \mathbf{e}_j \underbrace{\frac{\delta_{ij}|y-x|^2 - 3(y_j - x_j)(y_i - x_i)}{4\pi |y-x|^2}}_{=:h(y)}.$$

Selvästi $h(t(y+x)) = h(y+x)$ jokaisella reaaliluvulla $t \neq 0$. Saamme pääarvointegraalille L^p-rajoituksen, mikäli voimme näyttää, että funktio h on integroituva yksikköpallon $B_1(x)$ reunapinnan $S_1(x)$ yli ja jos

$$\int_{S_1(x)} h(y)dy = 0.$$

Ensinnäkin funktio h on selvästi rajoitettu pinnalla S_1, joten se on integroituva. Toisaalta integraalista saamme

$$\begin{aligned}
\int_{S_1(x)} h(y)dy &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(x)} [\delta_{ij} - 3(y_j - x_j)(y_i - x_i)]dy \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[4\pi\delta_{ij} - \int_{S_1(x)} [3n_j(y)(y_i - x_i)]dy \right] \\
&= \delta_{ij} - \frac{3}{4\pi} \int_{B_1(x)} \frac{\partial (y_i - x_i)}{\partial y_j} dy \\
&= \delta_{ij} - \frac{3}{4\pi} \operatorname{Vol}(B_1)\delta_{ij} = 0.
\end{aligned}$$

Siispä Calderón-Zygmund -epäyhtälö on käytössä komponenteille ja pääarvointegraali on L^p-rajoitettu.

□

Propositio 5.3.8. ([*10*, s.51]) *Olkoon* $1 < p < \infty$ *ja* $k = 0, 1, 2....$ *Operaattori* T_Ω *on rajoitettu kuvaus*

$$T_\Omega : L^p_{\mathbb{H}}(\Omega) \to W^{1,p}_{\mathbb{H}}(\Omega).$$

Todistus. Oletetaan, että funktio u on jatkuva joukossa $\overline{\Omega}$ ja äärettömän monta kertaa jatkuvasti derivoituva joukossa Ω. Pyritään näyttämään operaattorille T rajoitus

$$\|T_\Omega u\|_{W^{p,1}_{\mathbb{H}}(\Omega)} \leqslant K \|u\|_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)},$$

missä vakio K ei riipu funktiosta u. Tämän jälkeen voimme laajentaa tämän rajoitetun lineaarioperaattorin Sobolev-avaruuksiin, missä sileät funktiot ovat tiheä osajoukko. Laajennettu operaattori on rajoitettu samalla rajoite-ehdolla [13, s. 100].

Lauseen 5.3.5 arviosta

$$\|T_\Omega u\|_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)} \leqslant R\,\|u\|_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)}\,,$$

missä $R > 0$, nähdään, että $T_\Omega u$ on p-integroituva. Lauseista 5.3.5 ja 5.3.7 saadaan Sobolev-normille arvio

$$\begin{aligned}
\|T_\Omega u\|_{W^{1,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)} &= \left(\|T_\Omega u\|^p_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{3}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}T_\Omega u\right\|^p_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \|T_\Omega u\|_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{3}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}T_\Omega u\right\|_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)} \\
&\leqslant R\,\|u\|_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{3} C\,\|u\|_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)} \\
&= K\,\|u\|_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)}\,.
\end{aligned}$$

Siispä T_Ω on rajoitettu operaattori $T_\Omega : L^p_{\mathbb{H}}(\Omega) \to W^{1,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)$.

□

Propositio 5.3.9. ([*10*, *s.*51]) *Olkoon* $1 < p < \infty$ *ja* $k = 0, 1, 2....$ *Operaattori* T_Ω *on kuvaus*

$$T_\Omega : L^p_{\mathbb{H},\mathrm{loc}}(\Omega) \to W^{1,p}_{\mathbb{H},\mathrm{loc}}(\Omega)$$

Todistus. Todistus seuraa lähteessä [10, s.51] esitettyä todistusta käyttäen Cauchy-ytimelle ja Teodorescu-muunnokselle Määritelmässä 5.1.7 esiteltyjä etumerkkejä. Olkoon $u \in L^p_{\mathbb{H},\mathrm{loc}}(\Omega)$ ja olkoon $K \subset \Omega$ kompakti. Operaattori T_Ω saa esityksen

$$\begin{aligned}
(T_\Omega u)(x) &= -\int_\Omega e(y-x)u(y)dy \\
&= -\int_K e(y-x)u(y)dy - \int_{\Omega\setminus K} e(y-x)u(y)dy \\
&= (T_K u)(x) + (T_{\Omega\setminus K} u)(x).
\end{aligned}$$

Lauseen 5.3.1 mukaan $T_{\Omega\setminus K}$ on olemassa. Toisaalta Propositiosta 5.3.8 seuraa, että

$T_K : L^p_{\mathbb{H}}(K) \to W^{1,p}_{\mathbb{H}}(K)$, joten $T_K u$ on integroituva kompakteissa osajoukoissa. On siis oltava $T_\Omega u \in W^{1,p}_{\mathbb{H},\mathrm{loc}}(\Omega)$. $\square$

Seuraavaksi on tarkoitus yleistää Dirac-operaattori kvaternifunktioiden Sobolev-avaruuksiin. Tämän olemme jo tehneetkin määrittelemällä operaattori komponenteittain heikkojen osittaisderivaattojen avulla Määritelmässä 4.2.2. Gaussin kaava 5.1.4 toteaa, että

$$\int_\Omega \left[\overline{(D_l f)} g - \overline{f}(D_l g)\right] dV = -\int_\Gamma \overline{f} n g dS$$

sopivien oletusten ollessa voimassa. Jos tulkitaan funktio g reunalla Γ häviäväksi testifunktioksi, toteutuu kaava

$$\int_\Omega \overline{f}(D_l g) dV = \int_\Omega \overline{(D_l f)} g dV.$$

Tämä yhtälö tarjoaa mallin D_l-operaattorille. Seuraava määritelmä korjaa lähteessä [10, s. 53] esitettyä ja lähteestä [11, s. 137] pääteltävissä olevaa määritelmää Dirac-operaattorille toisen etumerkkinsä osalta. Samalla tullaan väittäneeksi lähdekirjallisuuden määritelmää epäkonsistentiksi siitä johdettujen tulosten kanssa. Tässä työssä esitettävän määritelmän ristiriidattomuus nojaa Gaussin kaavan 5.1.4 oikeellisuuteen, sekä määritelmän yhtäpitävyyteen reaalisten heikkojen derivaattojen avulla tehdyn määritelmän 4.2.2 kanssa. Tämä yhtäpitävyys osoitetaan myöhemmin Propositiossa 5.3.11.

Määritelmä 5.3.10. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avoin ja olkoon $u, v \in L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)$. Testifunktioilla tarkoitetaan äärettömän monta kertaa derivoituvia kvaterniarvoisia funktioita, jotka häviävät reunalla $\partial\Omega$. Jos

$$\int_\Omega \overline{v}(D_l \varphi) dV = \int_\Omega \overline{u} \varphi dV$$

jokaisella testifunktiolla φ, niin tällöin merkitään $u = D_g v$, missä D_g tarkoittaa *yleistettyä derivaattaa.*

Tällä tavoin määritelty derivaatta on yksikäsitteinen, sillä jos funktiot u ja w ovat yleistettyjä derivaattoja funktiolle v, niin

$$\int_\Omega \overline{v} D_l \varphi dV = \int_\Omega \overline{u} \varphi dV = \int_\Omega \overline{w} \varphi dV$$

toteutuu kaikilla testifunktioilla φ. Tästä seuraa, että

$$\sum_{i,j=0}^{3} \overline{\mathbf{e}}_i \mathbf{e}_j \int_\Omega u_i \varphi_j dV = \sum_{i,j=0}^{3} \overline{\mathbf{e}}_i \mathbf{e}_j \int_\Omega w_i \varphi_j dV.$$

Koska testifunktioiksi voidaan valita muotoa $\varphi = \varphi_k \mathbf{e}_k$ olevia funktioita, missä siis ainoastaan yksi komponentti poikkeaa nollasta, pätee yhtälö komponenteille erikseen. Tällöin

$$\int_\Omega (v_i - w_i) \varphi_j dV = 0$$

jokaisella reaaliarvoisella testifunktiolla φ_j, kun indeksi $i = 0, 1, 2, 3$. On siksi oltava $v_i = w_i$ jokaisella $i = 0, 1, 2, 3$, mistä seuraa, että $v = w$ melkein kaikkialla. Luonnillisesti funktiot samaistetaan L^p-avaruuksissa.

Näytetään seuraavaksi, että Gaussin kaavan mallilla määritelty heikko Dirac-operaattori on yhteensopiva komponenteittain määritellyn operaattorin kanssa.

Propositio 5.3.11. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avoin ja olkoon $v \in W^{1,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)$. Tällöin $D_g v = D_l v$, missä operaattorin D_l derivoinnit tulkitaan heikoiksi reaalisiksi osittaisderivaatoiksi.*

Todistus. On näytettävä, että funktio $v \in W^{1,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)$ operoituna Dirac-operaattorilla kelpaa yleistetyksi derivaataksi $D_g v$, eli on osoitettava, että komponenteittain määritelty Dirac-operaattori toteuttaa yhtälön

$$\int_\Omega \overline{v} D_l \varphi dV = \int_\Omega \overline{D_l v} \varphi dV$$

jokaisella testifunktiolla φ. Kirjoittamalla integraaleja Dirac-operaattorin määritelmän 4.2.2 mukaan auki, saadaan

$$\begin{aligned}\int_g \overline{v} D_l \varphi dV &= \int_\Omega \sum_{i=0}^{3} v_i \overline{\mathbf{e}}_i \sum_{p=1}^{3} \mathbf{e}_p \frac{\partial}{\partial x_p} \sum_{j=0}^{3} \varphi_j \mathbf{e}_j dV \\ &= \sum_{\substack{i,j=0\\p=1}}^{3} \overline{\mathbf{e}}_i \mathbf{e}_p \int_\Omega v_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_p} dV \mathbf{e}_j.\end{aligned}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned}\int_\Omega \overline{D_l v} \varphi \; dV &= \int_\Omega \sum_{\substack{i,j=0\\p=1}}^{3} \overline{\mathbf{e}_p \mathbf{e}_i} \; \frac{\partial v_i}{\partial x_p} \varphi_j \mathbf{e}_j dV \\ &= \sum_{\substack{i,j=0\\p=1}}^{3} \overline{\mathbf{e}}_i \overline{\mathbf{e}}_p \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_p} \varphi_j dV \mathbf{e}_j \\ &= \sum_{\substack{i,j=0\\p=1}}^{3} \overline{\mathbf{e}}_i \mathbf{e}_p \left(- \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_p} \varphi_j dV \right) \mathbf{e}_j \\ &= \sum_{\substack{i,j=0\\p=1}}^{3} \overline{\mathbf{e}}_i \mathbf{e}_p \int_\Omega v_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_p} dV \mathbf{e}_j,\end{aligned}$$

missä on käytetty reaalisen heikon derivaatan määritelmää komponenttifunktioille v_i. Propositio voitaisiin nähdä myös Gaussin lauseen suorana seurauksena. □

Seuraava tulos liittää Teodorescu-muunnoksen ja Dirac-operaattorin toisiinsa. Tulos on esitelty lähteissä [10, s. 53] ja [11, s. 137] käyttäen yleistetylle derivaatalle D_g Gaussin lauseen ja Dirac-operaattorin määritelmän kanssa ristiriitaista muotoilua.

Propositio 5.3.12. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avoin ja olkoon u integroituva joukossa Ω. Funktiolla $T_\Omega u$ on tällöin yleistetty derivaatta ja*

$$D_g T_\Omega u = u$$

Todistus. Todistus täydentää lähteissä [10, s. 53] ja [11, s. 137] esitettyjä todistuksia korjaten samalla niissä esiintyviä merkkivirheitä. Olkoon φ testifunktio, eli joukossa

Ω äärettömän monta kertaa jatkuvasti derivoituva funktio, joka on jatkuva joukossa $\overline{\Omega}$ ja joka lisäksi häviää reunalla $\partial\Omega$. Pyritään näyttämään väite yleistetyn derivaatan määritelmän 5.3.10 mukaisesti soveltamalla Fubinin lausetta integraaliin

$$\int_\Omega \overline{u(y)}\varphi(y)dy.$$

Ensinnäkin klassisen Borel-Pompeiun kaavan 5.2.1 mukaan testifunktiolle on voimassa yhteys $T_\Omega D_l \varphi = \varphi$, sillä testifunktio on sileä ja häviää reunalla $\Gamma = \partial\Omega$. Samalla varmistuu kyseisen Teodorescu-integraalin olemassaolo. Käyttämällä tätä kaavaa ja Hölderin epäyhtälöä, löydetään arvio

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left|\overline{u(y)}(T_\Omega D_l^x \varphi)(y)\right| dy &\leqslant \int_\Omega |u(y)|\,|\varphi(y)|\,dy \\ &\leqslant \|u\|_{L^1_{\mathbb{H}}(\Omega)} \|\varphi\|_{L^\infty_{\mathbb{H}}(\Omega)} < \infty, \end{aligned}$$

sillä sulkeumassa $\overline{\Omega}$ jatkuva funktio φ on rajoitettu. Funktio

$$\int_\Omega \overline{u(y)}(T_\Omega D_l^x \varphi)(y)dy = \int_\Omega \int_\Omega \overline{u(y)}(-e(x-y)D_l^x \varphi(x))dxdy$$

on siten integroituva ja Fubinin lausetta voidaan käyttää. Integraalin kvaternilineaarisuuden avulla saadaan

$$\begin{aligned} \int_\Omega \overline{u(y)}\varphi(y)dy &= \int_\Omega \overline{u(y)}\ (T_\Omega D_l^x \varphi)(y)dy \\ &= \int_\Omega \overline{u(y)} \left(-\int_\Omega e(x-y)D_l^x \varphi(x)\ dx \right) dy \\ &= \int_\Omega \overline{u(y)} \left(-\int_\Omega \overline{e(y-x)}D_l^x \varphi(x)\ dx \right) dy \\ &= \int_\Omega \left(-\int_\Omega \overline{u(y)}\ \ \overline{e(y-x)}D_l^x \varphi(x)dy \right) dx \\ &= \int_\Omega \left(\overline{-\int_\Omega e(y-x)u(y)dy} \right) D_l^x \varphi(x)dx \\ &= \int_\Omega \overline{(T_\Omega u)(x)}D_l^x \varphi(x)dx, \end{aligned}$$

mistä väite seuraa.

□

Propositio 5.3.13. ([*10*, s.53 – 54]) *Olkoon* $1 < p < \infty$ *ja olkoon* $v \in L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)$. *Tällöin* $D_l T_\Omega v = v$.

Todistus. Propositiosta 5.3.8 seuraa, että $T_\Omega v \in W^{1,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)$. Propositioista 5.3.11 ja 5.3.12 seuraa, että $D_l T_\Omega v = D_g T_\Omega v = v$. □

5.4 Operaattorin F_Γ tarkastelua integroituvien funktioiden avaruuksissa

Tämän aliluvun tärkein anti on Sobolev-avaruuksiin yleistetty Borel-Pompeiu -integraalikaava. Lisäksi tarkastellaan joitakin Cauchy-Bitsadze -operaattorin ominaisuuksia.

Sulkeumassa $\overline{\Omega}$ jatkuvien funktioiden u reuna-arvot $u_{|\Gamma}$ ovat hyvin määritellyt. Tarkasteltaessa integroituvien funktioiden avaruuksia reuna-arvot on määriteltävä uudelleen, koska funktioiden määrittely ei yllä nollamittaisiin joukkoihin. Ongelma voidaan ratkaista määrittelemällä integroituvan funktion reuna-arvot sileiden funktioiden jonojen avulla asettamalla

$$\mathrm{tr}\ u := u_{|\Gamma} = \lim_{n\to\infty} u_{n|\Gamma},$$

missä $(u_n) \to u$ joukossa Ω. Kutsutaan operaattoria tr rajoittuma-operaattoriksi (engl. *trace*). Jotta määritelmä olisi järkevä, reuna-arvojen tulee olla joukossa Γ riippumattomia jonon valinnasta. Tämän todistaa klassinen rajoittumalause.

Lause 5.4.1. ***(Rajoittuma)*** ([7, s.1010]) *Olkoon* $\Omega \in \mathbb{R}^3$ *avoin ja* $\overline{\Omega}$ *kompakti. Olkoon reuna* $\Gamma = \partial\Omega$ *pinta, jolla on* C^1*-sileys. On olemassa yksinäksitteinen lineaarikuvaus* $tr : W^{k,p}(\Omega) \to W^{k-1,p}(\Gamma)$*, joka toteuttaa* $tr\ u = u_{|\Gamma}$ *jokaisella joukossa* Ω *sileällä funktioilla, joka on jatkuva reunalla* Γ. *Lisäksi on voimassa arvio*

$$\|tr\ u\|_{W^{k-1,p}(\Gamma)} \leqslant C\,\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}\,.$$

Todistus. Todistukset lauseelle löytyy Sobolev-avaruuksien perusteoksista, kuten [1] ja [2] ja joistakin soveltavammista teoksista, kuten [7]. Todettakoon todistuksesta, että mainittu Sobolev-normien arvio osoittaa operaattorin tasaisen jatkuvuuden, minkä vuoksi se on yksikäsitteisesti laajennettavissa Sobolevin avaruuteen. Edellämainittu jonokarakterisointi sileiden ja reunalla jatkuvien funktioiden avulla kelpaa siten rajoittumaoperaattorin määritelmäksi. □

Lemma 5.4.2. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avoin ja rajoitettu joukko, jolla on (paloittain) C^1 reunapinta Γ. Operaattorille F_Γ on arvio*

$$\|F_\Gamma u\|_{L^1_{\mathbb{H}}(\Omega)} \leqslant C \|u\|_{L^1_{\mathbb{H}}(\Gamma)},$$

kun u on integroituva.

Todistus. Lemman 5.3.3 mukaisesti löydetään arvio

$$\int_\Gamma \int_\Omega |e(y-x)|\, dx\, |n(y)|\, |u(y)|\, dy = \int_\Gamma R\, |u(y)|\, dy = R \|u\|_{L^1_{\mathbb{H}}(\Gamma)} < \infty,$$

missä $R = \sup\{\|y-x\|_{\mathbb{R}^3} : x, y \in \Omega\}$ ja u on integroituva. Tonellin lauseen perusteella

$$\int_\Omega \int_\Gamma |e(y-x)|\, |n(y)|\, |u(y)|\, dydx = R \|u\|_{L^1_{\mathbb{H}}(\Gamma)},$$

mistä seuraa, että

$$\|F_\Gamma u\|_{L^1_{\mathbb{H}}(\Omega)} = \int_\Omega |(F_\Gamma u)(x)|\, dx \leqslant R \|u\|_{L^1_{\mathbb{H}}(\Gamma)}.$$

□

Lause 5.4.3. ([*10*, s.57]) *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avoin ja rajoitettu joukko, jolla on (paloittain) C^1 reunapinta. Olkoon $1 < p < \infty$ ja olkoon $u \in W^{1,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)$. Tällöin*

$$F_\Gamma u + T_\Omega D_l u = u$$

on voimassa melkein kaikkialla joukossa Ω. Reunaintegraalioperaattorin F_Γ tapauksessa funktiolla u tarkoitetaan reuna-arvoja $\operatorname{tr} u$.

Todistus. Todistus hyödyntää yleisesti tunnettuja Sobolev-avaruuksissa käytettyjä menetelmiä keskeisimmän lähdekirjallisuuden sijaan. Olemme todistaneet Borel-

Pompeiun kaavan 5.2.1 klassisen tapauksen, missä tarkasteltava funktio on jatkuvasti derivoituva. Olkoon nyt $u \in W^{1,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)$. Koska $C^\infty_{\mathbb{H}}(\Omega)$ on avaruuden $W^{1,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)$ tiheä aliavaruus, tarkastellaan sileiden funktioiden jonoa $(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_{\mathbb{H}}(\Omega)$, missä $\|u_i - u\|_{W^{1,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)} \to 0$. Klassinen Borel-Pompeiu on voimassa jonon jäsenille ja

$$\lim_{i\to\infty} F_\Gamma u_i + \lim_{i\to\infty} T_\Omega D_l u = \begin{cases} u, & \text{joukossa } \Omega \\ 0, & \text{joukossa } \mathbb{R}^3 \backslash \Omega. \end{cases}$$

On tarkastettava voidaanko rajankäynnit viedä operaattorien sisälle.

Ensinnäkin Lauseessa 5.3.5 esitellyllä normin arviolla saadaan

$$\begin{aligned} \lim_{i\to\infty} \|T_\Omega(D_l u_i - D_l u)\|_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)} &\leqslant \lim_{i\to\infty} C \|D_l u_i - D_l u\|_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)} \\ &= \lim_{i\to\infty} C \left\| \sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{3} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n \left(\frac{\partial u_{i,n}}{\partial x_m} - \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right) \right\|_{L^p_{\mathbb{H}}(\Omega)} \\ &\leqslant C \sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{3} \lim_{i\to\infty} \left\| \frac{\partial u_{i,n}}{\partial x_m} - \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right\|_{L^p_{\mathbb{R}}(\Omega)} \to 0, \end{aligned}$$

sillä Sobolev $\{1,p\}$-avaruudessa heikot derivaatat suppenevat.
Erityisesti

$$\lim_{n\to\infty} T_\Omega D_l u_n = T_\Omega D_l u$$

melkein kaikkialla joukossa Ω.

Toisaalta rajoittuma-operaattorin jatkuvuuden 5.4.1 ja Lemman 5.4.2 mukaisesti operaattorille F_Γ löydetään arvio

$$\|F_\Gamma \mathrm{tr}\ u\|_{L^1_{\mathbb{H}}(\Omega)} \leqslant C_1 \|\mathrm{tr}\ u\|_{L^1_{\mathbb{H}}(\Gamma)} \leqslant C_2 \|u\|_{W^{1,1}_{\mathbb{H}}(\Omega)}.$$

Rajankäynnistä saadaan

$$\lim_{i\to\infty} \|F_\Gamma \mathrm{tr}\ (u_i - u)\|_{L^1_{\mathbb{H}}(\Omega)} \leqslant \lim_{i\to\infty} \|u_i - u\|_{W^{1,1}_{\mathbb{H}}(\Omega)} \to 0,$$

sillä $u \in W^{1,p}_{\mathbb{H}}(\Omega) \subset W^{1,1}_{\mathbb{H}}(\Omega)$. On siis oltava

$$\lim_{i\to\infty} F_\Gamma u_i = F_\Gamma u$$

melkein kaikkialla joukossa Ω. $\square$

Koska olemme käsitelleet operaattorien D_l ja T_Ω kuvausominaisuudet kaavoissa 4.2.4 ja 5.3.9, Borel-Pompeiun kaavalla on suoraviivaista tarkastella myös operaattoria F_Γ. Olkoon $u \in W^{k,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)$, missä $1 < p < \infty$ ja $k = 1, 2, 3...$ Tällöin

$$\begin{aligned}\|F_\Gamma u\|_{W^{1,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)} &= \|u - T_\Omega D_l u\|_{W^{1,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)}\\ &\leqslant \|u\|_{W^{1,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)} + \|T_\Omega D_l u\|_{W^{1,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)}\\ &\leqslant (1+C)\,\|u\|_{W^{1,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)}\,,\end{aligned}$$

mikä tarkoittaa, että operaattori F_Γ on rajoitettu operaattori avaruudelta $W^{1,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)$ avaruudelle $W^{1,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)$. Toisaalta kuvaus $F_\Gamma u$ on säännöllinen, sillä Borel-Pompeiun perusteella

$$D_l F_\Gamma u = D_l(u - T_\Omega D_l u) = D_l u - D_l u = 0,$$

koska D_l on vasen käänteisoperaattori Teodorescu-muunnokselle. Opereaattori F_Γ on siis kuvaus avaruudelta $W^{1,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)$ avaruudelle $W^{1,p}_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap \ker D_l$.

Reuna-arvo-ongelmien reunaehtojen asettamisessa on oltava tarkkana. Reuna-arvojen on nimensä mukaisesti oltava jonkin soveliaan funktion rajoittumia reunalle. Tämä tarkoittaa, että rajoittumaoperaattorin maalijoukkoa on rajattava, jotta kuvaus olisi surjektiivinen. Avaruuden $\mathrm{im}(\mathrm{tr}\ W^{k,p}_{\mathbb{H}}(\Omega))$ tarkempi tarkastelu sivuutetaan tässä työssä ja todetaan, että ratkaisu ongelmaan löytyy käyttämällä reunalla Γ murtoasteisia Sobolev-avaruuksia. Lähteessä [1, s. 214,217] on käyty läpi integroituvien reaalifunktioiden $G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ avaruutta, joka voidaan määritellä normin

$$\|u\|_{W^{k+\sigma,p}} = \left(\|u\|_{W^{k,p}} + \sum_{|\alpha|=k} \int_G \int_G \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}} dxdy\right)^{\frac{1}{p}}$$

suhteen, missä $1 \leqslant p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$ ja $0 \leqslant \sigma < 1$. Näitä avaruuksia merkitään samaan tapaan merkinnällä $W^{k,p}$, mutta luvun k sallitaan olla positiivinen reaaliluku. Kun k on luonnollinen luku, avaruus vastaa tavanomaisia Sobolev-avaruuksia. Toisaalta rajoittuma-operaattori operoi avaruuden $W^{k,p}$ funktioita avaruuteen $W^{k-\frac{1}{p},p}$ surjektiivisesti rajoite-ehdoilla

$$\begin{aligned}\|v\|_{W^{k-\frac{1}{p},p}(\Gamma)} &\leqslant K_1\,\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}\,,\\ \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} &\leqslant K_2\,\|v\|_{W^{k-\frac{1}{p},p}(\Gamma)}\,,\end{aligned}$$

missä tr$u = v$ [1, s. 217]. Kokoamalla edelliset tulokset, saadaan seuraava lause.

Lause 5.4.4. ([*10*, *s*.57]) *Olkoon* $1 < p < \infty$ *ja olkoon* k *jokin positiivinen kokonaisluku. Operaattori* F_Γ *on kuvaus*

$$F_\Gamma : W_{\mathbb{H}}^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma) \to W_{\mathbb{H}}^{1,p}(\Omega) \cap kerD_l.$$

Todistus. Väite seuraa, koska rajoittuma-operaattori on surjektio

$$\mathrm{tr} : W_{\mathbb{H}}^{1,p}(\Omega) \to W_{\mathbb{H}}^{1-1/p,p}(\Gamma)$$

ja F_Γ on kuvaus

$$F_\Gamma : W_{\mathbb{H}}^{1,p}(\Omega) \to W_{\mathbb{H}}^{1,p}(\Omega) \cap \ker D_l.$$

□

5.5 Plemelj-Sokhotski -kaava

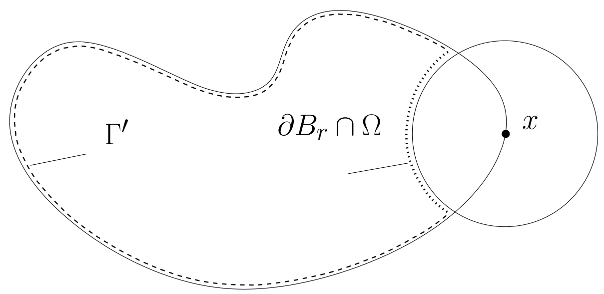
Tässä aliluvussa on tarkoitus näyttää sopivien oletusten ollessa voimassa, että jos $F_\Omega u = 0$ alueen $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ ulkopuolella, niin tällöin alueessa Ω funktiolla $F_\Omega u$ ja funktiolla u on samat reuna-arvot. Tätä varten esitellään klassinen Plemelj-Sokhotski -kaava, joka sitoo Cauchy-Bitsadze -operaattorin reuna-arvot rajoitetun alueen sisä- ja ulkopuolella toisiinsa singulaarisen reunaintegraalioperaattorin avulla. Käydään läpi kaavan klassinen tapaus. Yleistystä L^p-avaruuksiin ei tarkastella. Mainittakoon, että tässäkin luvussa poikkeamme Cauchy-ytimen merkeistä lähteisiin [10, s. 61→] ja [11, s. 105→] nähden. Kriittinen tarkastelu jää lukijan harteille.

Propositio 5.5.1. ([*9*, *s*.133]) *Olkoon* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *rajoitettu alue, jolla on sileä reunapinta* $\Gamma = \partial\Omega$*. Olkoon* $x \in \mathbb{R}^3$*. Tällöin*

$$\int_\Gamma e(y-x)n(y)d\Gamma = \begin{cases} 1, & x \in \Omega \\ 1/2, & x \in \Gamma \\ 0, & x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}, \end{cases}$$

missä n *tarkoittaa pinnan* Γ *ulkoista yksikkönormaalia. Keskimmäinen integraali on ymmärrettävä pääarvointegraalina.*

Todistus. Todistus seuraa lähteessä [9, s. 133] esitettyä todistusta. Olkoon $x \in \Omega$. Väite seuraa Cauchyn kaavasta 5.2.2 valitsemalla $u = 1$ alueessa Ω. Vastaavasti jos $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$, väite seuraa Cauchyn kaavasta 5.2.3. Jos $x \in \Gamma$, niin integraali on singulaarinen. Eristetään piste x leikkaamalla pintaa Γ pienellä x-keskeisellä r-säteisellä pallolla $B_r(x)$. Merkintä Γ' tarkoittaa pinnan Γ osaa, joka on pallon B_r ulkopuolella. Tarkastellaan sulkeutuvaa pintaa $A = \Gamma' \cup (\partial B_r \cap \Omega)$. (Vertaa kuva 5.3.) Singulaaripiste on pinnan A rajaaman alueen ulkopuolella, joten Cauchyn



Kuva 5.3 *Havainnollistus pinnoista* Γ' *ja* $\partial B_r \cap \Omega$

kaavasta seuraa, että

$$\int_A e(y-x)n(y)dy = 0,$$

missä n tarkoittaa pinnan A yksikköulkonormaalia. Hajottamalla integraali integrointialueidensa mukaisiin osiin, päätellään, että

$$\int_{\Gamma'} e(y-x)n(y)dy = \int_{\partial B_r \cap \Omega} e(y-x)n(y)dy.$$

Käytetään vasemman puolen integraalin laskemiseen oikean puolen integraalia ja pyritään näyttämään, että se lähestyy arvoa 1/2.

Pallolle B_r saadaan yksikköulkonormaali tuttuun tapaan, jolloin

$$e(y-x)n(y) = \frac{\overline{y-x}}{4\pi\,|y-x|^3}\frac{y-x}{|y-x|} = \frac{1}{A_{\partial B_r}},$$

missä $A_{\partial B_r}$ tarkoittaa pallon B_r pinta-alaa. Ottamalla pallopinnan ∂B_r orientaatio huomioon, integraali palautuu muotoon

$$\int_{\Gamma'} e(y-x)n(y)dy = \frac{1}{A_{\partial B_r}} \int_{\partial B_r(x) \cap \Omega} dy = \frac{A_{\partial B_r \cap \Omega}}{A_{\partial B_r}} \to 1/2,$$

kun $r \to 0$, koska pinnalle Γ on oletettu riittävä sileys. $\square$

Tarkastellaan seuraavaksi integraalioperaattoria

$$(S_\Gamma u)(x) = \lim_{r\to 0} \int_{\Gamma\setminus B_r(x)} e(y-x)n(y)u(y)dy,$$

missä $x \in \Gamma$.

Lemma 5.5.2. *Operaattori $S_\Gamma u$ on olemassa rajoitetun joukon sileällä reunalla Γ, kun funktio u on Hölder-jatkuva.*

Todistus. Tulos seuraa melko suoraan Propositiosta 5.5.1. Etsitään sopiva integroituva funktio, jonka avulla pääarvointegraalin itseisarvolle löydetään arvio.

Olkoon $x_0 \in \Gamma$. Edellisen Proposition perusteella

$$\frac{1}{2}u(x) = \lim_{r\to 0} \int_{\Gamma\setminus B_r(x)} e(y-x)n(y)dyu(x).$$

Tarkastellaan seuraavaa integraalia. Dominoidun konvergenssin lauseen perusteella saamme

$$\begin{aligned}(S_\Gamma u)(x) - \frac{1}{2}u(x) &= \lim_{r\to 0} \int_{\Gamma\setminus B_r(x)} e(y-x)n(y)[u(y)-u(x)]dy \\ &= \int_\Gamma e(y-x)n(y)[u(y)-u(x)]dy,\end{aligned}$$

koska funktio $e(y-x)n(y)[u(y)-u(x)]$ on integroituva. Tämä nähdään soveltamalla funktioon u Hölder-ehtoa $|u(y)-u(x)| \leqslant C\,|y-x|^\beta$, missä $0 < \beta \leqslant 1$. Tällöin saadaan

$$\int_\Gamma |e(y-x)|\,|u(y)-u(x)|\,dy \leqslant C \int_\Gamma \frac{1}{|y-x|^{2-\beta}}dy,$$

missä integrandi on muotoa $1/r^{2-\beta}$ reunapinnalla. Riittää tarkastella singulaaripisteen ympäristöä. Pisteellä x on ympäristö $B_\varepsilon(x)\cap\Gamma$, missä arvio palautuu reunapinnan sileiden kuvausten avulla tasoon. Tällöin

$$\begin{aligned}\int_{B_\varepsilon(x)\cap\Gamma} \frac{1}{|y-x|^{2-\beta}}dy &\leqslant C_2 \int_S \frac{1}{|\psi(a)-\psi(b)|^{2-\beta}}\,|J|\,dS \\ &\leqslant C_3 2\pi \int_0^R r^{\beta-1}dr < \infty,\end{aligned}$$

missä $S \subset \mathbb{R}^2$ on rajoitettu ja R on jokin positiivinen reaaliluku.

Kolmioepäyhtälöllä löydämme arvion

$$|(S_\Gamma u)(x)| - \left|\frac{1}{2}u(x)\right| \leqslant \left|(S_\Gamma u)(x) - \frac{1}{2}u(x)\right| < \infty.$$

□

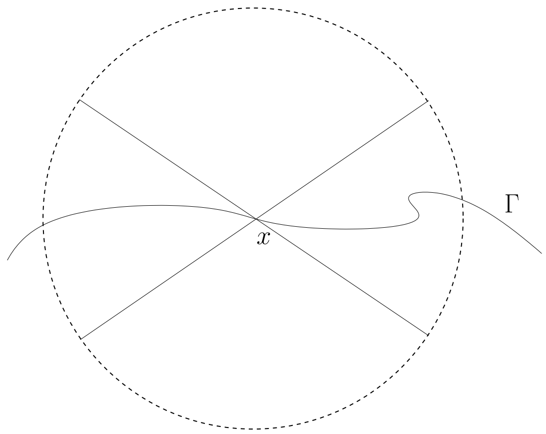
Olkoon $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ jokin pinta ja $x \in \Gamma$. Määritellään ei-tangentiaalinen raja-arvo

$$\lim_{\substack{t \to x \\ t \in \mathcal{N}^\pm}} f(t)$$

asettamalla

$$\mathcal{N}^\pm = \{x \in \mathbb{R}^3 : d(t, \Gamma) > m\,|x - t|\}, \tag{5.1}$$

kun m on reaaliluku väliltä $(0, 1)$ ja $d(t, \Gamma)$ on pisteen t pienin etäisyys pintaan Γ. Jotta määritelmä olisi mielekäs, on muuttujan t voitava rajatta lähestyä pistettä x joukossa $\mathcal{N}$. Tämä on mahdollista, jos pinta Γ toteuttaa niinsanotun kartiosäännön. Pisteessä $x \in \Gamma$ on voimassa kartiosääntö, mikäli on olemassa palloympäristö $B_r(x)$,



Kuva 5.4 *Havainnollistus kartiosäännöstä*

jonka sisällä kaksi vastakkaista kartiota leikkaavat pinnan Γ vain pisteessä x. (Vertaa kuva 5.4.) Hyvä esimerkki kartiosäännön toteuttavasta pinnasta on Lipschitz-pinta. Kiinnittämällä $x \in \Gamma$ Lipschitz-ehdossa

$$|\psi(y) - \psi(x)| \leqslant C\,|y - x|\,,$$

nähdään, että reaalilukukerroin C asettaa tämän rajoituksen. Tämän työn puitteissa käsitellään lähinnä sileitä pintoja, joille kartiosääntö on yksinkertainen seuraus reaalisesta väliarvolauseesta. Pintojen geometrisia ominaisuuksia on tarkasteltu lyhyesti lähteessä [1, s. 65→].

Lause 5.5.3. ([*9*, *s*.135]) *Olkoon* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *rajoitettu alue, jolla on* C^1*-reunapinta* $\Gamma = \partial\Omega$ *ja olkoon* u *Hölder-jatkuva kvaternifunktio, joka on määritelty pinnalla* Γ. *Tällöin*

$$\lim_{\substack{t \to x \\ t \in \mathcal{N}^{\pm}}} (F_\Gamma u)(t) = (S_\Gamma u)(x) \pm \frac{1}{2} u(x),$$

missä $x \in \Gamma$ *ja termin* $u(x)$ *edessä oleva etumerkki viittaa tarkasteltavaan joukkoon* $t \in \Omega^{\pm}$, *missä* $\Omega^+ = \Omega$ *ja* $\Omega^- = \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$.

Todistus. Todistus hyödyntää lähteessä [11, s. 105] esitettyä ideoita. Olkoon $x \in \Gamma$ ja olkoon u Hölder-jatkuva kvaternifunktio. Pyritään käyttämään konvergenssilauseita ei-tangentiaalisen rajankäynnin $t \to x$ tutkimiseen.

Muokataan aluksi operaattorit F_Γ ja S_Γ soveliaaseen muotoon. Käytetään operaattorin F_Γ määritelmää ja Propositiota 5.5.1. Merkitään pinnan Γ yksikköulkonormaalia funktiolla n. Operaattori F_Γ saa tällöin esityksen

$$\begin{aligned}
(F_\Gamma u)(t) &= \int_\Gamma e(y-t)n(y)[u(y)-u(x)]dy + \int_\Gamma e(y-t)n(y)dy\ u(x) \\
&= \begin{cases} I(t) + u(x), & t \in G \\ I(t), & t \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{G}, \end{cases}
\end{aligned}$$

missä on käytetty merkintää

$$I(t) := \int_\Gamma e(y-t)n(y)[u(y)-u(x)]dy.$$

Tämä integraali on olemassa ja äärellinen, kun $t \notin \Gamma$.

Toisaalta operaattori S_Γ saa esityksen

$$\begin{aligned}
(S_\Gamma u)(x) &= \int_\Gamma e(y-x)n(y)[u(y)-u(x)]dy + \frac{1}{2}u(x) \\
&= I(x) + \frac{1}{2}u(x),
\end{aligned}$$

missä integraali $I(x)$ on olemassa Lebesgue-integraalina. (Vertaa Proposition 5.5.2 todistuksessa esitettyyn.) Pääarvointegraaleja ei siis enää esiinny. Väite seuraa, mikäli voimme näyttää, että $I(t) \to I(x)$, kun $t \to x$ ei-tangentiaalisesti.

Etsitään kuvauksen $I(t)$ integrandia rajoittava integroituva funktio ja käytetään dominoidun konvergenssin lausetta. Arvioidaan integrandia käyttäen Hölder-ehtoa. Tällöin

$$|e(y-t)n(y)[u(y)-u(x)]| \leqslant C\frac{|y-x|^\beta}{|y-t|^2}.$$

Kyseessä on integroituva funktio, jos voimme osoittaa, että jokaisella $y \in \Gamma$ on voimassa

$$|y-x| \leqslant D\,|y-t| \tag{5.2}$$

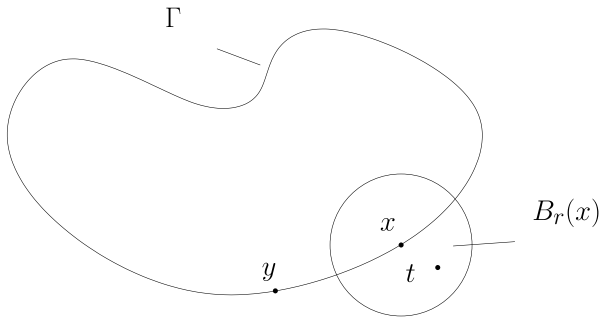
jollakin reaalilukukertoimella D. Tällöin arvio on muotoa

$$|e(y-t)n(y)[u(y)-u(x)]| \leqslant C\,|y-x|^{\beta-2},$$

joka on integroituva Lemman 5.5.2 todistuksessa esiteltyyn tapaan.

1. Ensinnäkin Jos $x = y$, niin arvio 5.1 on selvä.

2. Tarkastellaan seuraavaksi pientä palloympäristöä $B_r(x)$, missä on voimassa kartio-ominaisuus. Voimme olettaa, että $\mathrm{d}(t, \partial B_r(x)) \geqslant K_1$ jollakin reaaliluvulla $K_1 > 0$. Mikäli $y \notin B_r(x)$, löydämme arvion $K_1 \leqslant |y-t|$. (Vertaa kuva



Kuva 5.5 *Muuttuja y pallon ulkopuolella*

   5.5.) Koska käsittelemme rajoitettua joukkoa Ω ja sen reunapintaa, on oltava $\sup\{|y-x| : y \in \Gamma\} =: K_2 \in \mathbb{R}$. Tällöin $|y-x| \leqslant K_2 \leqslant \frac{K_2}{K_1}|y-t|$.

3. Jos $y \in \overline{B_r(x)}$, niin löydämme arvion ei-tangentiaalisuuden määritelmän 5.1 avulla. Saamme

$$m\,|x-t| < d(t,\Gamma) \leqslant |t-y|\,.$$

Lisäämme termin $m\,|t-y|$ ja käytämme kolmioepäyhtälöä, jolloin saamme

$$m\,|x-t+t-y| \leqslant m\,|x-t| + m\,|t-y| < |t-y| + m\,|t-y|\,.$$

Tällöin

$$|x-y| < \frac{1+m}{m}\,|t-y|\,.$$

Arvio 5.2 on siis voimassa ja funktion $I(t)$ integrandi on rajoitettu integroituvalla funktiolla jokaisella $t \in \Omega^{\pm}$. Dominoidun konvergenssin lauseen nojalla $I(t) \to I(x)$.

□

Plemelj-sokhotski -kaavan suorana seurauksena saadaan ehdot, joiden mukaan reunalla Γ määritelty Hölder-funktio u voidaan laajentaa säännölliseksi funktioksi joukkoon Ω tai $\mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$. Funktio $F_\Gamma u$ on funktion u säännöllinen jatko joukkoon Ω jos ja vain jos $S_\Gamma u = \frac{1}{2}u$. Toisaalta $F_\Gamma u$ on funktion u säännöllinen jatko joukkoon $\mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$ jos ja vain jos $S_\Gamma u = -\frac{1}{2}u$. [11, s. 108]

Tämän työn kannalta mielenkiintoa herättää lähinnä seuraava seuraus.

Lause 5.5.4. *Olkoon $G \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu alue, jolla on C^1-reunapinta $\Gamma = \partial G$. Olkoon u reunalla Γ määritelty Lipschitz-funktio (L^p-funktio). Funktioilla u ja $F_\Gamma u$ on samat reuna-arvot, jos $F_\Gamma u = 0$ joukossa $\mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$.*

Todistus. Jos $F_\Gamma u = 0$ joukossa $\mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$, niin Plemelj-Sokhotski -kaavan mukaan $S_\Gamma u = \frac{1}{2}u$ reunalla Γ. Edelleen Plemelj-Sokhotski -kaavan mukaan

$$\lim_{\substack{t \to x \\ t \in \Omega}} (F_\Gamma u)(t) = (S_\Gamma u)(x) + \frac{1}{2}u(x) = u(x)$$

reunan Γ pisteissä x.

Yleistystä L^p-avaruuksiin emme käsittele, vaan vetoamme lähdekirjoihin [11, s. 105] ja [8, s. 125→].

□

6. AVARUUDEN $L^2_{\mathbb{H}}$ ORTOGONAALINEN HAJOTELMA

Tässä luvussa on tarkoitus määritellä avaruuteen L_2 sovelias sisätulo, jonka suhteen avaruus jaetaan ortogonaalisena summana säännöllisten funktioiden avaruudeksi ja sen ortonaalikomplementiksi.

6.1 Sisätulon määritteleminen

Avaruuteen $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$, missä $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ on avoin ja rajoitettu, voidaan määritellä tavanomainen sisätulo asettamalla

$$(f, g)_2 = \int_\Omega \overline{f} g dV. \tag{6.1}$$

Funktioavaruuden neliöintegroituvuuden vuoksi sisätulo on hyvin määritelty. Tämä nähdään Hölderin epäyhtälöstä. Vaikka joukon Ω mitallisuus ja funktioavaruuden neliöintegroituvuus riittäisivät sisätulon määrittelyä varten, käsittelemme joukkoa Ω avoimena ja rajoitettuna. Tarvitsemme tulevissa todistuksissa näitä ominaisuuksia. Sisätulo toteuttaa ominaisuudet

1. $(u, u)_2 \geqslant 0$ jokaisella $u \in L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ ja
   $(u, u)_2 = 0 \Leftrightarrow u = 0$,
2. $(u, v)_2 = \overline{(v, u)_2}$ jokaisella $u, v \in L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$,
3. $(u + v, w)_2 = (u, w)_2 + (v, w)_2$ jokaisella $u, v, w \in L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$,
4. $(u\beta, v)_2 = \overline{\beta}(u, v)_2$ jokaisella $\beta \in \mathbb{H}$ ja $u, v \in L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$,

jotka seuraavat suoraan integraalin ja konjugointien ominaisuuksista. Koska sisätulo on kvaterniarvoinen, tutut laskusäännöt tulon kommutointia lukuunottamatta ovat voimassa. Edelleen sisätulo indusoi normin

$$\sqrt{(u,u)_2} = \|u\|_{L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)},$$

joka on siis tuttu L^2-normi. Tässä työssä käsittelemme myös reaalikertoimilla painotettua sisätuloa ja joudumme samalla luopumaan joistakin sisätulon ominaisuuksista.

Tarkastellaan avaruutta $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$, missä $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ on rajoitettu ja avoin joukko. Olkoon reaalifunktiot r_i, missä $i = 0, 1, 2, 3$, mitallisia funktioita, jotka ovat rajoitettuja ehdoin $0 < m < r_i < M$ joillakin reaaliluvuilla m ja M. Esitellään avaruuteen kertojaoperaattori asettamalla

$$Ru = \sum_{i=0}^{3} r_i u_i \mathbf{e}_i.$$

Tällöin operaattorille on olemassa käänteisoperaattori R^{-1}, joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$R^{-1}u = \sum_{i=0}^{3} r_i^{-1} u_i \mathbf{e}_i.$$

Myös käänteisoperaattorin kerroinfunktiot r_i^{-1} ovat rajoitettuja vastaavin ehdoin $0 < \frac{1}{M} < r_i^{-1} < \frac{1}{m}$, joten operaattorit ovat eräässä mielessä samaa muotoa. Kerroinfunktioiden mitallisuudesta ja rajoittuneisuudesta seuraa, että operaattori säilyttää operoitavan funktion integroituvuusominaisuudet. Tämä tarkoittaa, että R on bijektio avaruudelta $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ itselleen.

Määritellään avaruuteen kvaterniarvoinen bilineaarikuvaus

$$(u,v)_R := (R^{-1}u, R^{-1}v)_2 = \int_\Omega \overline{R^{-1}u} R^{-1} v dV,$$

missä $(\cdot,\cdot)_2$ on perinteinen sisätulo 6.1.

Propositio 6.1.1. ([*11*, s.111]) *Kuvaus $(\cdot,\cdot)_R$ toteuttaa ominaisuudet*

1. $(u,u)_R \geqslant 0$ *jokaisella* $u \in L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ *ja*
   $(u,u)_R = 0 \Leftrightarrow u = 0$,
2. $(u,v)_R = \overline{(v,u)}_R$ *jokaisella* $u, v \in L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$,

3. $(u+v,w)_R = (u,w)_R + (v,w)_R$ *jokaisella* $u,v,w \in L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$,
4. $\lambda(u,v)_R = (\lambda u, v)_R = (u, \lambda v)_R$ *jokaisella* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ja* $u,v \in L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$.

Todistus. Todistukset ovat melko suoraviivaisia ja seuraavat suoraan kvaterniarvoisen integraalin määritelmästä, sekä konjugaattien laskusäännöistä. □

Kutsumme kuvausta $(\cdot,\cdot)_R$ sisätuloksi, vaikka kyseessä on kvaterniarvoinen kuvaus ja lisäksi ominaisuudessa 4 ei vaadita, että sisätulosta pitäisi voida tuoda kvaternikerrointa ulos. Mahdollisia hankaluuksia saattaisi tulevaisuudessa tuottaa tulon kommutoinnin puute ja heikennetty vaatimus aksioomalle 4. Kuitenkin useat sisätulolle osoitetut funktionaalianalyysin tulokset yleistyvät suoraan tälle kvaterniarvoiselle painotetulle sisätulolle.

Propositio 6.1.2. *Sisätulo* $(\cdot,\cdot)_R$ *toteuttaa epäyhtälön*

$$|(f,g)_R| \leqslant \sqrt{|(f,f)_R|}\sqrt{|(g,g)_R|}$$

jokaisella $f,g \in L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$. *Epäyhtälöä kutsutaan Cauchy-Schwarzin epäyhtälöksi.*

Todistus. Usein Cauchy-Schwarzin epäyhtälö todistetaan käyttämällä pelkästään sisätulon aksioomia. Sisätulon $(\cdot,\cdot)_R$ ominaisuuksissa 6.1.1 ei kuitenkaan ole osoitettu tulosta, joka takaisi kvaternikertoimen kuljettamisen sisätulon ulkopuolelle. Näytetään epäyhtälö aksiomaattisen lähestymistavan sijaan käyttämällä kuvauksen $(\cdot,\cdot)_R$ määritelmää. Käytetään integraalin kolmioepäyhtälöä ja Hölderin epäyhtälöä. Olkoon $f,g \in L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
|(f,g)_R| &= \left| \int_\Omega \overline{R^{-1}f} R^{-1} g dV \right| \\
&\leqslant \int_\Omega \left| \overline{R^{-1}f} R^{-1} g \right| dV \\
&= \left(\int_\Omega \left| \overline{R^{-1}f} \right|^2 dV \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \left| R^{-1} g \right|^2 dV \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{|(f,f)_R|}\sqrt{|(g,g)_R|}.
\end{aligned}$$

□

Määritellään avaruuteen $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ kuvaus $\|\cdot\|_R : L^2_{\mathbb{H}}(\Omega) \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$\|f\|_R = \sqrt{|(f,f)_R|}.$$

Lause 6.1.3. *Kuvaus* $\|\cdot\|_R : L^2_{\mathbb{H}}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *on normi.*

Todistus. Kyseessä on normi, sillä normiavaruuden (Määritelmä 2.1.2) aksioomat 1 ja 2 seuraavat suoraan sisätulon $(\cdot,\cdot)_R$ ominaisuuksista 6.1.1. Aksioomaa 3 varten voidaan käyttää Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä. Katso esimerkiksi [15, s. 53] ja [21, s. 293]. □

Lause 6.1.4. *Avaruus* $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ *on Hilbert-avaruus, kun sisätuloksi valitaan* $(\cdot,\cdot)_R$*, missä painokertoimet* r_i*, missä* $i = 0,1,2,3$*, ovat mitallisia, ehdoin* $0 < m < r_i < M$ *rajoitettuja reaalifunktioita.*

Todistus. On näytettävä, että Cauchy-jonot normin $\|\cdot\|_R$ suhteen ovat suppenevia. Epäyhtälöt

$$\begin{aligned}
\|f\|_R &= \sqrt{\int_\Omega |R^{-1}f|^2\,dV} \\
&= \sqrt{\int_\Omega \sum_{i=0}^{3} (r_i^{-1} f_i)^2 dV} \\
&\begin{cases} \leqslant 2\sup_{i,x}\{r_i^{-1}(x)\}\sqrt{\int_\Omega \sum_{i=0}^3 f_i^2 dV} \\ \geqslant 2\inf_{i,x}\{r_i^{-1}(x)\}\sqrt{\int_\Omega \sum_{i=0}^3 f_i^2 dV} \end{cases}
\end{aligned}$$

ovat voimassa jokaisella $f \in L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$. Toisin sanoin normeille $\|\cdot\|_R$ ja $\|\cdot\|_2$ toteutuu epäyhtälö

$$D_1 \|\cdot\|_2 \leqslant \|\cdot\|_R \leqslant D_2 \|\cdot\|_2,$$

missä positiiviset reaalikertoimet D_1 ja D_2 riippuvat ainoastaan operaattorista R. Tällöin avaruuden $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ funktiojonot ovat Cauchy-jonoja normin $\|\cdot\|_R$ suhteen täsmälleen silloin kun ne ovat Cauchy-jonoja normin $\|\cdot\|_2$ suhteen. Toisaalta avaruuden $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ funktiojonot ovat suppenevia normin $\|\cdot\|_R$ suhteen täsmälleen silloin kun ne ovat suppenevat normin $\|\cdot\|_2$ suhteen. Koska avaruus $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ on täydellinen normin $\|\cdot\|_2$ suhteen, on se täydellinen myös normin $\|\cdot\|_R$ suhteen.

$\square$

6.2 Avaruuden $L^2_{\mathbb{H}}$ jako sisätulon suhteen

Tarkoituksena on ottaa käyttöön sisätulon $(\cdot,\cdot)_R$ ja sen industoiman normin ominaisuudet ja jakaa avaruus $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ kahteen keskenään ortogonaaliseen suljettuun aliavaruuteen.

Otetaan käyttöön funktionaalianalyysin peruskäsitteitä ja tuloksia. Aliavaruudella tarkoitetaan vektoriavaruuden epätyhjää osajoukkoa, joka on suljettu laskutoimitusten suhteen. Hilbert-avaruuden H epätyhjän osajoukon M ortogonaalikomplementilla tarkoitetaan joukkoa

$$M^{\perp} = \{\ x \in H \mid (x, y) = 0\ \forall y \in M\ \}.$$

Joukko on suljettu, jos sen komplementti on avoin. Lisäksi joukko voidaan osoittaa suljetuksi näyttämällä, että se sisältää suppenevien jonojensa raja-arvot. Hyviä funktionaalianalyysin perusteoksia on lähteinä käytetyt teokset [15], [21] ja [26].

Lause 6.2.1. ([*15*, *s.*55]) *Olkoon Y Hilbert-avaruuden H suljettu aliavaruus. Tällöin $Y^{\perp}$ on avaruuden H suljettu aliavaruus. Lisäksi jokaisella $x \in H$ on yksikäsitteinen esitys $x = y + y^{\perp}$, missä $y \in Y$ ja $y^{\perp} \in Y^{\perp}$. Tällöin merkitään $H = Y \oplus Y^{\perp}$, missä merkintää $\oplus$ kutsutaan aliavaruuksien suoraksi summaksi. Joukkojen ortogonaalisuutta jonkin sisätulon suhteen korostetaan merkinnällä $\oplus^{\perp}$, jota kutsutaan ortogonaaliseksi summaksi.*

Todistus. Todistus löytyy esimerkiksi lähteistä [15, s. 55] ja [21, s. 294]. Erityishuomiona todistuksien pohjalla olevista oletuksista voidaan mainita, että sisätulon on oltava additiivinen, toteutettava Cauchy-Schwarzin epäyhtälö ja sen on indusoitava normi. Sisätulon homogeenisuusehdoksi tässä tapauksessa ei tarvitse vaatia kvaternilineaarisuutta. $\square$

Lemma 6.2.2. ([*11*, *s.*110]) *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu alue, jolla on (paloittain) sileä reunapinta Γ. Avaruus $RA_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ on avaruuden $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ suljettu aliavaruus.*

Todistus. Todistus hyödyntää lähteissä [8, s. 104] ja [11, s. 110] olevia ideoita. Osoitetaan, että $A_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ on avaruuden $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ suljettu aliavaruus. Koska operaattori D_l on lineaarinen, kyseessä on aliavaruus. Aliavaruuden osoittamiseksi suljetuksi tutkitaan Cauchy-jonoa $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset A_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$. Koska avaruus $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ on täydellinen, suppenee jono kohti funktiota $f \in L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$.

Tarkastellaan joukkoon Ω sisältyviä suljettuja palloja. Näytetään, että osittaisderivaattojen jono $(\frac{\partial}{\partial x_j} f_n)$, missä $j = 1, 2, 3$, suppenee tasaisesti joukossa $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$. Tällöin $\lim_{i\to\infty} \frac{\partial}{\partial x_j} f_n = \frac{\partial}{\partial x_j} f$, mistä seuraa, että $D_l f = \lim_{n\to\infty} D_l f_n = 0$ kussakin pallossa. Koska avoin joukko Ω voidaan peittää suljetuilla palloilla, väite on todistettu. Cauchyn integraalikaavan ja Hölderin epäyhtälön mukaan

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{\partial}{\partial x_j} f_n(x_0) - \frac{\partial}{\partial x_j} f_m(x_0) \right| &= \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\partial B_r(x_0)} e(y - x_0) n(y) \left[f_n(y) - f_m(y) \right] dy \right| \\
&= \int_{\partial B_r(x_0)} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} e(y - x_0) \right| \left| f_n(y) - f_m(y) \right| dy \\
&\leqslant \frac{12}{4\pi r^3} \left\| f_m - f_n \right\|_{L^1_{\mathbb{H}}(\partial B_r(x_0))},
\end{aligned}
$$

mistä seuraa tasainen suppeneminen suljetuissa palloissa. Derivoinnin voi viedä integraalin sisälle, koska Cauchy-Bitsadze-integraali on äärellinen, Cauchy-ydin on derivoituva ja derivaatalle löydetään Proposition 5.3.2 todistuksen tavoin arvio

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{\partial}{\partial x_j} e(y - x) \right| &= \left| \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \frac{\delta_{ij} |y - x|^2 - 3(y_i - x_i)(y_j - x_j)}{4\pi |y - x|^5} \right| \\
&\leqslant \frac{12}{4\pi |y - x|^3},
\end{aligned}
$$

mistä nähdään, että rajoituttaessa pisteen x_0 pieneen ympäristöön $B_{r/2}(x_0)$, etäisyys $|x - y|$ on positiivinen, kun $y \in \Gamma$. Derivaatat ovat siis rajoitettuja kun $x \in B_{r/2}(x_0)$. Derivaatta löydetään Dominoidun konvergenssin lauseella tarkastelemalla jonoa $(x_n) = (x_0 + a_n \mathbf{e}_j) \subset B_{r/2}(x_0)$, missä $a_n < r/2$, kuten todistuksessa 5.3.2.

□

Otetaan käyttöön merkintä

$$
\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega) = \{ f \in W^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega) \mid \mathrm{tr}\, f = 0 \}.
$$

Kyseessä on $W^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega)$-funktioiden avaruus, jonka funktiot häviävät reunalla $\partial\Omega$.

Seuraava lause korjaa lähteitä [10, s. 84] ja [11, s. 111]. Näyttää siltä, että näiden lähteiden esityksistä puuttuu yksi kertojaoperaattori. Väitteen tueksi esitetään myöhemmin vastaesimerkkejä.

Lause 6.2.3. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avoin ja rajoitettu. Avaruus $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ voidaan jakaa hajotelmaksi*

$$L^2_{\mathbb{H}}(\Omega) = RA_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega) \oplus_R^{\perp} RD_l(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega)),$$

missä $\oplus_R^{\perp}$ tarkoittaa ortogonaalista summaa sisätulon $(\cdot,\cdot)_R$ suhteen.

Todistus. Todistus korjaa ja täydentää lähteissä [10, s. 84] ja [11, s. 111] olevia todistuksia. Sisätulo $(\cdot,\cdot)_R$ on additiivinen ja reaalilukukertoimien suhteen homogeeninen (Propositio 6.1.1). Toisaalta se toteuttaa Cauchy-Schwarzin epäyhtälön 6.1.2 ja indusoi normin (Propositio 6.1.3). Lisäksi avaruus $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ on Hilbert-avaruus sisätulon $(\cdot,\cdot)_R$ suhteen. Nämä ominaisuudet takaavat Lauseen 6.2.1 kanssa, että avaruus voidaan jakaa suljetun aliavaruuden ja sen ortogonaalikomplementin muodostamaksi suorasummahajotelmaksi.

1. Koska avaruus $RA_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ on avaruuden $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ suljettu aliavaruus Lemman 6.2.2 nojalla, osoitettavaksi jää, että sen ortogonaalikomplementti on $RD_l(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega))$. On siis näytettävä, että

$$RD_l(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega)) = (RA_{\mathbb{H}}(\Omega \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)))^{\perp}.$$

2. Näytetään ensin, että $RD_l(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega)) \subset (RA_{\mathbb{H}}(\Omega \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)))^{\perp}$. Olkoon $g = Ra \in RA_{\mathbb{H}} \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$, missä funktio a on säännöllinen ja neliöintegroituva. Olkoon $u = RD_l w \in RD_l(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega))$, missä $w \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega)$. Käytetään funktiot u ja g sisätulossa $(\cdot,\cdot)_R$, muokataan sisätulo tavanomaiseksi sisätuloksi ja käytetään

Gaussin lausetta 5.1.4. Tällöin

$$\begin{aligned}(u,g)_R &= (R^{-1}u, R^{-1}g)_2 \\ &= (R^{-1}RD_l w, R^{-1}Ra)_2 \\ &= (D_l w, a)_2 \\ &= \int_\Omega \overline{D_l w} a dV \\ &= \int_\Omega \overline{D_l w} a + \overline{w}\underbrace{(D_l a)}_{=0} dV \\ &= \int_\Gamma \overline{w} n a dS = 0,\end{aligned}$$

sillä funktio w häviää reunalla Γ. On siis oltava $RD_l(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega)) \subset (RA_{\mathbb{H}}(\Omega \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)))^\perp$.

3. Seuraavaksi näytetään, että $(RA_{\mathbb{H}}(\Omega \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)))^\perp \subset RD_l(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega))$. Oletetaan, että $u \in (RA_{\mathbb{H}} \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega))^\perp$. Koska $u \in L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$, niin funktio $v = T_\Omega R^{-1}u \in W^{1,p}_{\mathbb{H}}(\Omega)$ on hyvin määritelty ja $u = RD_l v$, sillä D_l on Teodorescu-muunnoksen vasen käänteiskuvaus. Pyritään näyttämään, että funktiolla $F_\Gamma v$ on samat reuna-arvot kuin funktiolla v. Tämä seuraa Lauseesta 5.5.4, mikäli näytämme, että $F_\Gamma v = 0$ joukon $\overline{\Omega}$ ulkopuolella. Tällöin F-operaattorin säännöllisyyden takia funktio u voidaan kirjoittaa muodossa $u = RD_l v = RD_l(\underbrace{v - F_\Gamma v}_{tr=0}) \in RD_l(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega))$, mistä väite $(RA_{\mathbb{H}}(\Omega \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)))^\perp \subset RD_l(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega))$ seuraa.

4. Tarkastettavaksi jää, että $F_\Gamma v = 0$ alueen Ω ulkopuolella. Tarkastellaan säännöllistä funktiota
$$g_p(x) = \frac{y - x_p}{|y - x_p|^3},$$
missä $x_p \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$. Selvästi $Rg_p \in RA_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$, sillä funktio g_p on vakiokerrointa vaille Cauchy-ydin. Koska $\mathrm{dist}(x_p, \overline{\Omega}) > 0$, on g_p rajoitettu alueessa Ω ja on näin ollen neliöintegroituva. Joukkojen ortogonaalisuuden takia erityisesti $(u, Rg_p)_R = (RD_l v, Rg_p) = 0$. Muokkaamalla painotettu sisätulo tavanomai-

seksi sisätuloksi ja käyttämällä Gaussin lausetta 5.1.4, saadaan

$$\begin{aligned}
0 &= (RD_l v, Rg_p)_R \\
&= (R^{-1}RD_l v, R^{-1}Rg_p)_2 \\
&= (D_l v, g_p)_2 \\
&= \int_\Omega \overline{D_l v}\; g_p dV - \int_\Omega \overline{v}\, \underbrace{D_l g_p}_{=0} dV \\
&= -\int_\Gamma \overline{v} n g_p dV \\
&= \int_\Gamma \overline{v}\; \overline{n}\; \overline{\overline{g_p}} dS \\
&= \overline{\int_\Gamma \overline{g_p} n v dS} \\
&= \overline{\int_\Gamma \overline{\frac{y - x_p}{|y - x_p|^3}} n(y) v(y) dy} \\
&= 4\pi \overline{(F_\Gamma v)(x_p)},
\end{aligned}$$

mikä pätee jokaisella $x_p \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$. Tämä tarkoittaa, että on oltava $F_\Gamma v = 0$ joukossa $\mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$.

□

Lause 6.2.4. *Ortogonaalinen hajotelma määrittelee yksikäsitteiset projektiot*

$$\begin{aligned}
P_R &: L^2_{\mathbb{H}}(\Omega) \to RA_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega), \\
Q_R &: L^2_{\mathbb{H}}(\Omega) \to RD(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega)).
\end{aligned}$$

Hajotelman 6.2.3 suora seuraus on hajotelma

$$L^2_{\mathbb{H}}(\Omega) = A_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega) \oplus^\perp D_l(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega)), \tag{6.2}$$

joka saadaan valitsemalla kertojaoperaattori identtiseksi kuvaukseksi. Tällöin hajotelma on ortogonaalinen tavanomaisen sisätulon 6.1 suhteen. Tällä hajotelmalla on merkittävä osuus joidenkin reuna-arvo-ongelmien ratkaisujen olemassaolon todistamisessa. Projektio-operaattoreilla taas voidaan muokata lausekkeita, jotta ratkaisu voitaisiin lausua tunnettujen funktioiden avulla.

Tämän työn yhdeksi alkuperäisistä tavoitteista oli asetettu lineaarisen elastisuustehtävän mahdollisen ratkaisun tarkastelu. Tehtävä on muotoa

$$\begin{cases} \mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla \cdot u) = -f, & \text{alueessa } \Omega, \\ u = g, & \text{reunalla } \Gamma, \end{cases}$$

missä u on tarkasteltavan kappaleen siirtymiä kuvaava vektorikenttä ja f on kappaleen kokemia tilavuusvoimia kuvaava vektorikenttä. Reaaliluvut λ ja μ ovat materiaalivakioita, joille on asetettu fysikaaliset rajoite-ehdot $\mu > 0$ ja $\lambda + \mu > 0$. (Vertaa [17, s. 500].) Lähteissä [10] ja [11] ongelmaa lähestyttiin muodostamalla painotetun sisätulon mukainen ortogonaalinen hajotelma

$$L^2_{\mathbb{H}}(\Omega) = RA_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega) \oplus^{\perp}_{R} D_l(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega)), \tag{6.3}$$

mihin elastisuustehtävän todistukset vahvasti nojaavat [10, s. 85]. Huomaamme kuitenkin eroavaisuuden Lauseessa 6.2.3 esitetyn hajotelman

$$L^2_{\mathbb{H}}(\Omega) = RA_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega) \oplus^{\perp}_{R} RD_l(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega))$$

kanssa. Pyritään todistamaan lähdekirjallisuudessa esitetty hajotelma (6.3) vääräksi tapauksessa, jossa kertojaoperaattori R on muotoa

$$Ru = a\mathrm{Re}u + b\mathrm{Im}u,$$

kun reaalikertoimet $a, b \neq 0$ ja $a \neq b$. Samalla joudumme toteamaan, että tältä erää on luovuttava tavoitteesta tutkia elastisuusyhtälöä.

Propositio 6.2.5. *Joukot $RA_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ ja $D_l(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega))$ eivät ole ortogonaaliset sisätulon $(\cdot,\cdot)_R$ suhteen, kun valitaan $Ru = aReu + bImu$, missä reaalikertoimet $a, b \neq 0$ ja $a \neq b$.*

Todistus. Esitetään vastaesimerkki. Olkoon

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_{\mathbb{R}^3} < 1\}, & \\ g_p : (x_1, x_2, x_3) \to \frac{x-k}{|x-k|^3}, & \text{missä } x = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i, \text{ ja } k = 10\mathbf{e}_1 \in \mathbb{H}, \\ Z : (x_1, x_2, x_3) \to (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)\mathbf{e}_3, & \end{cases}$$

eli Ω on rajoitettu ja avoin. Kertojaoperaattori on hyvin määritelty, koska kertoimet poikkeavat nollasta. Tällöin on olemassa käänteisoperaattori, joka saa muodon

$$\begin{aligned} R^{-1}u &= \frac{1}{a}\mathrm{Re}u + \frac{1}{b}\mathrm{Im}u \\ &= \frac{1}{b}u + \frac{b-a}{ab}\mathrm{Re}u \\ &=: Au + B\mathrm{Re}u, \end{aligned}$$

missä $A, B \neq 0$.

Käydään läpi valittujen funktioiden ominaisuudet ja varmistetaan, että niiden avulla voidaan määritellä haluttuihin joukkoihin kuuluvat funktiot. Funktio g_p on kerrointa vaille Cauchy-ydin, joten se on säännöllinen ja sileä, kun $x \neq k$. Koska singulaarisuus on kohdassa $(10, 0, 0)$, joka ei kuulu joukkoon $\overline{\Omega}$, funktio g_p on rajoitettu joukossa Ω. Arvioimalla nimittäjää kolmioepäyhtälöllä alaspäin, saadaan

$$|g_p| = \left|\frac{x-k}{|x-k|^3}\right| = \frac{1}{|x-k|^2} \leqslant \frac{1}{||x|-|k||^2} \leqslant \frac{1}{||1|-|10||^2} = \frac{1}{81}.$$

Tällöin g_p on neliöintegroituva joukossa Ω ja on siis oltava $g_p \in A_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$. Määritellään $Y_p = Rg_p \in RA_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$.

Tarkastellaan seuraavaksi funktiota Z. Funktio Z on selvästi jatkuva, joten reuna-arvot saadaan helposti laskemalla. Ensinnäkin $x \in \partial\Omega$ jos ja vain jos

$$\|x\|_{\mathbb{R}^3} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Tällöin $Z_{|\partial\Omega} = (1-1)\mathbf{e}_3 = 0$, joten funktion Z reuna-arvot ovat nollat. Toisaalta polynomifunktio Z on neliöintegroituva rajoitetussa joukossa Ω. Funktion Z derivaatat ovat muotoa

$$\frac{\partial}{\partial x_i} Z = 2x_i\mathbf{e}_3,$$

kun $i = 1, 2, 3$. Vastaavasti derivaatat ovat neliöintegroituvia, joten $Z \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega)$.

Määritellään $Z_p = D_l Z \in D_l(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega))$, joka löydetään laskemalla

$$\begin{aligned}
Z_p = D_l Z &= \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} Z \\
&= \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)\mathbf{e}_3 \\
&= \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i 2x_i \mathbf{e}_3 \\
&= -2x_1\mathbf{e}_2 + 2x_2\mathbf{e}_1 \underbrace{-2x_3\mathbf{e}_0}_{=\mathrm{Re}Z_p}.
\end{aligned}$$

Lisäksi lauseessa määritellyn kertojaoperaattorin inverssillä operoituna funktio palautuu muotoon

$$R^{-1}Z_p = AZ_p + B\mathrm{Re}Z_p,$$

missä $A, B \neq 0$.

Aletaan tarkastella funktioiden Y_p ja Z_p painotettua sisätuloa $(Y_p, Z_p)_R$. Muokataan painotettu sisätulo tavanomaiseksi sisätuloksi ja pyritään käyttämään ortogonaalidekompositiota 6.2. Käytämme samalla sisätulon additiivisuutta, reaalista homogeenisuutta ja funktion Y_p määritelmää. Tällöin

$$\begin{aligned}
(Y_p, Z_p)_R &= (R^{-1}Y_p, R^{-1}Z_p)_2 \\
&= (R^{-1}Rg_p, R^{-1}Z_p)_2 \\
&= (g_p, R^{-1}Z_p)_2 \\
&= (g_p, AZ_p + B\mathrm{Re}Z_p)_2 \\
&= A\underbrace{(g_p, Z_p)_2}_{=0} + B(g_p, \mathrm{Re}Z_p)_2 \\
&= B(g_p, \mathrm{Re}Z_p)_2,
\end{aligned}$$

sillä $g_p \in A_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ ja $Z_p \in D_l(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega))$. Sisätulo häviää hajotelman 6.2

nojalla. Jäljelle jäävästä sisätulosta saadaan

$$\begin{aligned}
(Y_p, Z_p)_R &= B(g_p, \mathrm{Re} Z_p) \\
&= B \int_\Omega \overline{\frac{x-k}{|x-k|^3}(-2x_3)\mathbf{e}_0}\, dx \\
&= 2B \int_\Omega \frac{x-k}{|x-k|^3}\, x_3\, dx \\
&= 2B \left(\mathbf{e}_1 \int_\Omega \frac{x_1 - 10}{|x-k|^3}\, x_3\, dx + \mathbf{e}_2 \int_\Omega \frac{x_2}{|x-k|^3}\, x_3\, dx + \mathbf{e}_3 \underbrace{\int_\Omega \frac{x_3}{|x-k|^3}\, x_3\, dx}_{=:I} \right).
\end{aligned}$$

Reaalikerroin B poikkeaa nollasta. Integraalista I saadaan taas arvio

$$I = \int_\Omega \frac{x_3^2}{|x-k|^3}\, dx \geqslant \frac{1}{\sup_{x\in\Omega}\{|x - 10\mathbf{e}_0|^3\}} \int_\Omega x_3^2\, dx > 0$$

Siispä $(Y_p, Z_p)_R \neq 0$, vaikka $Y_p \in RA_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ ja $Z_p \in D_l(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega))$. □

Vastaavasti voimme löytää vastaesimerkkejä hajotelmalle myös sisätulon $(\cdot,\cdot)_2$ suhteen.

Propositio 6.2.6. *Joukot $RA_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ ja $D_l(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega))$ eivät ole ortogonaaliset sisätulon $(\cdot,\cdot)_2$ suhteen, kun valitaan $Ru = aReu + bImu$, missä reaalikertoimet $a, b \neq 0$ ja $a \neq b$.*

Todistus. Valitaan joukko Ω ja funktio Z_p, kuten edellä. Valitsemalla $R(x_2 - x_3\mathbf{e}_1) \in RA_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$, voidaan näyttää väite. □

Vastaesimerkit yleistyvät myös tapauksiin, missä kertojaoperaattori esiintyy joukon $D_l(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega))$ edessä, mutta ei joukon $A_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ edessä.

Seuraus 6.2.7. *Joukot $A_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ ja $RD_l(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega))$ eivät ole ortogonaaliset sisätulon $(\cdot,\cdot)_R$ suhteen, kun valitaan $Ru = aReu + bImu$, missä reaalikertoimet $a, b \neq 0$ ja $a \neq b$.*

Todistus. Olkoon $Y \in A_{\mathbb{H}}(\Omega)$ ja $Z_p \in D_l(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega))$ todistuksen 6.2.6 funktioita, jotka toteuttavat $(KY, Z_p)_2 \neq 0$, missä kertojaoperaattoria on merkitty symbolilla K. Tällöin $0 \neq (KY, Z_p)_2 = (R^{-1}RKY, R^{-1}RZ_p)_2 = (RKY, RZ_p)_R$. Koska $R^{-1}u = \frac{1}{a}Reu + \frac{1}{b}Imu$, missä kertoimet poikkeavat toisistaan ja ovat erisuuret, voidaan valita $K = R^{-1}$. Tällöin $0 \neq (Y, RZ_p)_R$, vaikka $Y \in A_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ ja $RZ_p \in RD_l(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega))$. □

Seuraus 6.2.8. *Joukot $A_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ ja $RD_l(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega))$ eivät ole ortogonaaliset sisätulon $(\cdot,\cdot)_2$ suhteen, kun valitaan $Ru = aReu + bImu$, missä reaalikertoimet $a, b \neq 0$ ja $a \neq b$.*

Todistus. Vastaavasti kuin 6.2.7. □

Haluttua ortogonaalihajotelmaa ei siis saavuteta suoraviivaisesti sisätuloilla $(\cdot,\cdot)_R$ tai $(\cdot,\cdot)_2$. Lähestytään ongelmaa uudelleen määrittelemällä avaruuteen $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ kuvaus

$$(f, g)_{R,Re} = Re \int_{\Omega} \overline{f} Rg \; dV, \tag{6.4}$$

missä kertojaoperaattorin R kerroinfunktiot ovat mitallisia, ehdoin $0 < m < r_i < M$ rajoitettuja reaalifunktioita, kun $i = 0, 1, 2, 3$. Näytetään, että kuvaus $(\cdot,\cdot)_R$ on sisätulo reaaliselle vektoriavaruudelle $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$. Ensinnäkin kuvaus voidaan kirjoittaa muodossa

$$(f, g)_R = \int_{\Omega} Re\;(\overline{f}Rg)\; dV = \int_{\Omega} (f, Rg)_{\mathbb{R}^4} dV = \int_{\Omega} \sum_{i=0}^{3} r_i f_i g_i \; dV,$$

missä $(x, y)_{\mathbb{R}^4}$ on tavanomainen avaruuden $\mathbb{R}^4$ sisätulo. Tästä muotoilusta nähdään helposti sisätuloavaruuden aksioomien toteutuminen.

Propositio 6.2.9. *Kuvaus $(\cdot,\cdot)_{R,Re}$ on reaalisen vektoriavaruuden $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ sisätulo, kun kertojaoperaattorin R kertoimet ovat mitallisia, ehdoin $0 < m < r_i < M$ rajoitettuja reaalifunktioita.*

Todistus. Kirjoitetaan auki vain tärkeimmät pääpiirteet.

1. Kuvaus on positiividefiniitti, sillä

$$(f,f)_{R,Re} = \int_\Omega \sum_{i=0}^{3} r_i f_i^2 \; dV \geqslant 0.$$

Toisaalta aukikirjoitetusta sisätulosta nähdään, että

$$(f,f)_{R,Re} = 0 \Rightarrow f = 0.$$

2. Kuvaus on symmetrinen, sillä

$$(f,g)_{R,Re} = \int_\Omega \sum_{i=0}^{3} r_i f_i g_i \; dV = (g,f)_{R,Re}$$

3. Kuvauksen bilineaarisuus seuraa kertojaoperaattorin R reaalisesta lineaarisuudesta, avaruuden $\mathbb{R}^4$ sisätulon bilineaarisuudesta, sekä integraalin lineaarisuudesta.

□

Kuvaus $(\cdot,\cdot)_R$ on siis hyvin määritelty sisätulo.

Lause 6.2.10. *Avaruus $(L^2_{\mathbb{H}}(\Omega), (\cdot,\cdot)_{R,Re})$ on Hilbert, kun kertojaoperaattorin R kertoimet ovat mitallisia, ehdoin $0 < m < r_i < M$ rajoitettuja reaalifunktioita ja Ω on avoin ja rajoitettu.*

Todistus. Kirjoitetaan sisätuloa auki ja osoitetaan, että se on ekvivalentti tavanomaisen L^2-sisätulon kanssa. Ensinnäkin

$$m \int_\Omega (f,f)_{\mathbb{R}^4} \; dV \leqslant \int_\Omega (f,Rf)_{\mathbb{R}^4} \; dV \leqslant M \int_\Omega (f,f)_{\mathbb{R}^4} \; dV,$$

kun kerroinfunktioiden rajoittuneisuus on otettu huomioon. Ottamalla juuret epäyhtälöstä, saadaan

$$\sqrt{m}\sqrt{\int_\Omega |f|^2 \; dV} \leqslant \sqrt{\int_\Omega (f,Rf)_{\mathbb{R}^4} \; dV} \leqslant \sqrt{M}\sqrt{\int_\Omega |f|^2 \; dV}.$$

Yksinkertaistetuin merkinnöin kirjoitettuna yllämainittu yhtälö on muotoa

$$\sqrt{m}\,\|f\|_{L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)} \leqslant \sqrt{(f,f)_{R,Re}} \leqslant \sqrt{M}\,\|f\|_{L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)}\,,$$

missä keskimmäinen termi on sisätulon $(\cdot,\cdot)_{R,Re}$ indusoima normi.

□

Avaruus $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ varustettuna sisätulolla $(\cdot,\cdot)_R$ on siten Hilbert-avaruus, eikä tarkastelussa tarvinnut tehdä heikennettyjä vaatimuksia sisätulon aksioomille. Reaalinen versio sisätulosta tarjosi tässä kohtaa mielekkäämmän lähestymistavan. Tarkastellaan seuraavaksi haluttua ortogonaalista hajotelmaa.

Lause 6.2.11. *Avaruudelle $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ on olemassa ortogonaalinen hajotelma*

$$L^2_{\mathbb{H}}(\Omega) = RA_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega) \oplus^{\perp}_{R^{-1},Re} (RA_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega))^{\perp}$$

sisätulon , $(\cdot,\cdot)_{R^{-1},Re}$ suhteen. Lisäksi

$$D_l \mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}} \subset (RA_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega))^{\perp}.$$

Todistus. Todistus mukailee todistuksen 6.2.3 todistuksen ideoita.

1. Olemme osoittaneet Lauseessa 6.2.2, että $RA_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ on avaruuden $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ suljettu aliavaruus ja Lause 6.2.1 lupaa ortogonaalihajotelman. Näytettäväksi jää, että $D_l \mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega) \subset (R^{-1}A_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega))^{\perp}$.

2. Näytetään, että $D_l \mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega) \subset (R^{-1}A_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega))^{\perp}$. Olkoon $D_l w \in D_l \mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega)$ ja olkoon $R^{-1}a \in R^{-1}A_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$. Samaan tapaan kuin Lauseen 6.2.3 todistuksessa, saamme

$$\begin{aligned}
(D_l w, Ra)_{R^{-1},Re} &= Re \int_{\Omega} \overline{D_l w} R^{-1} Ra \; dV \\
&= Re \int_{\Omega} \overline{D_l w}\; a + \overline{w}\, \underbrace{D_l a}_{=0} \; dV \\
&= Re \int_{\Gamma} \overline{w} n a \; dS = 0,
\end{aligned}$$

missä on käytetty Gaussin lausetta 5.1.4.

$\square$

Avoimeksi ongelmaksi jää, voidaanko edellämainittu hajotelma lausua muodossa

$$RA_{\mathbb{H}}(\Omega) \oplus^{\perp}_{R^{-1},Re} D_l(\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega)).$$

Todistuksesta jäi uupumaan todistus osajoukolle

$$(RA_{\mathbb{H}}(\Omega) \cap L^2_{\mathbb{H}}(\Omega))^{\perp} \subset D_l\mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega).$$

Ongelmaa voitaisiin lähestyä Lauseen 6.2.3 todistuksen menetelmin, mutta pelkän reaaliosan tarkastelu tuo uusia haasteita.

7. LAPLACEN REUNA-ARVO-ONGELMA

Tässä luvussa sovelletaan esiteltyä teoriaa Laplacen ongelmaan. Osoitamme, että ongelmalle on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu, kun määrittelyjoukolle asetetaan soveliaat oletukset.

Laplacen ongelmassa etsitään ratkaisua $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ rajoitetussa alueessa Ω reuna-arvo-ongelmalle

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{alueessa } \Omega, \\ u = g, & \text{reunalla } \Gamma. \end{cases} \tag{7.1}$$

Muotoiltaessa tehtävää kvaternianalyysin keinoin, vektoriaalinen Laplacen operaattori muutetaan Proposition 4.2.6 mukaan operaattoriksi $D_l D_l = -\Delta$, joka on kuvaus avaruudelta $W_{\mathbb{H}}^{k+2,p}(\Omega)$ avaruudelle $W_{\mathbb{H}}^{k,p}(\Omega)$ Proposition 4.2.4 mukaan. Kvaternivastineessa ratkaisu Laplacen tehtävälle olisi siis kvaterniarvoinen funktio. Käydään tehtävä läpi useammassa osassa. Valitaan aluksi reuna-arvot nolliksi.

Lause 7.1. ([*10*, s.67]) *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avoin ja rajoitettu joukko, jolla on (paloittain) sileä reunapinta. Olkoon $f \in L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$. Tehtävällä*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \textit{alueessa } \Omega, \\ u = 0, & \textit{reunalla } \Gamma \end{cases}$$

on ratkaisu $u = T_\Omega Q T_\Omega f \in W_{\mathbb{H}}^{1,2}(\Omega)$.

Todistus. Todistus hyödyntää lähdettä [10, s. 67].

1. Pyritään ensin löytämään mahdollinen ratkaisu muokkaamalla yhtälön lähdetermiä kvaternioperaattoreilla ja soveltamalla sopivaa suorasummahajotelmaa. Tarkastellaan kuvausta $T_\Omega f$, joka Lauseen 5.3.8 mukaan kuuluu avaruuteen $W_{\mathbb{H}}^{1,2}(\Omega)$. Projisoidaan funktio $T_\Omega f$ avaruuden $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ suorasummajaon

(Lause 6.2.3) mukaisesti operaattorilla Q_I (Lause 6.2.4), missä kertojaoperaattorina käytetään identtistä kuvausta. Tällöin on olemassa funktio u, jonka reuna-arvot ovat nollat ja joka toteuttaa $Q_I T_\Omega f = D_l u \in D_l \mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega) \subset L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$. Koska funktion u reuna-arvot ovat nollat, Borel-Pompeiun kaava 5.4.3 palautuu muotoon

$$T_\Omega Q_I T_\Omega f = T_\Omega D_l u = u,$$

missä funktio u on lausuttu tunnetun funktion f avulla. Kuvauksen T_Ω ominaisuuksien 5.3.8 perusteella $u \in W^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega)$

2. Pyritään näyttämään, että löydetty funktio toteuttaa reuna-arvo-ongelman. Derivoimalla funktiota u käyttäen Lausetta 5.3.13, saadaan

$$-\Delta u = D_l D_l u = D_l D_l T_\Omega Q_I T_\Omega f = D_l Q_I T_\Omega f.$$

Osoittaaksemme, että viimeinen lauseke on funktio f, tarkastellaan projektioiden P_I ja Q_I ominaisuuksia. Funktio $T_\Omega f$ saa esityksen $T_\Omega f = P_I T_\Omega f + Q_I T_\Omega f$, missä $P_I T_\Omega f$ on säännöllinen. Siispä $f = D_l T_\Omega f = D_l Q_I T_\Omega f$, joten funktio u toteuttaa Laplacen yhtälön. Reunaehdot toteutuvat, koska projektion Q_I ominaisuuksien ja Borel-Pompeiun perusteella

$$tr\ (T_\Omega \underbrace{Q_I T_\Omega f}_{=:D_l \mathring{w}}) = tr\ (\mathring{w} - F_\Gamma \mathring{w}) = 0,$$

missä $\mathring{w} \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathbb{H}}$.

□

Tutkitaan Laplacen tehtävää valitsemalla reuna-arvoiksi soveliaan Sobolev-avaruuden funktion ja lähdetermiksi nollafunktion.

Propositio 7.2. ([*10*, s.67]) *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avoin ja rajoitettu joukko, jolla on (paloittain) sileä reunapinta. Olkoon $g \in W^{3/2,2}_{\mathbb{H}}(\Gamma)$. Tehtävällä*

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \textit{alueessa } \Omega, \\ u = g, & \textit{reunalla } \Gamma \end{cases}$$

on ratkaisu $u = F_\Gamma g + T_\Omega P_I D_l h \in W^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega)$, *missä funktio* h *on* $W^{2,2}_{\mathbb{H}}$*-jatko funktiolle* g *alueessa* Ω.

Todistus. Todistus noudattaa lähteen [10, s. 68] todistusta. Tarkastellaan funktion g jatkoa alueeseen Ω. Tällainen jatko on olemassa, koska tehtävän reuna-arvot on valittu rajoittumaoperaattorin kuva-avaruudesta. Merkitään tätä funktiota symbolilla $h \in W^{2,2}_{\mathbb{H}}(\Omega)$, jolle siis on voimassa $\operatorname{tr} h = g$. Muotoillaan Laplacen tehtävä funktiolle $v = u - h$, jolloin tehtävä palautuu muotoon

$$\begin{cases} -\Delta v = \Delta h, & \text{alueessa } \Omega, \\ v = 0, & \text{reunalla } \Gamma, \end{cases}$$

joka on Lauseen 7.1 mukainen tehtävä, koska $\Delta h \in L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$. Ratkaisuksi saadaan siten

$$v = T_\Omega Q_I T_\Omega \Delta h \in W^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega).$$

Puretaan funktioon h operoiva Laplace-operaattori D_l -operaattoreiksi ja käytetään Borel-Pompeiun kaavaa 5.4.3. Tällöin ratkaisu saa esitysmuodon

$$v = -T_\Omega Q_I T_\Omega D_l D_l h = -T_\Omega Q_I D_l h + T_\Omega Q_I F_\Gamma D_l h.$$

Borel-Pompeiun käyttö on sallittua, koska $D_l h \in W^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega)$. Purkamalla projektiokuvaus $Q_I = I - P_I$ osiinsa, saadaan

$$v = -T_\Omega D_l h + T_\Omega P_I D_l h + T_\Omega F_\Gamma D_l h - T_\Omega P_I F_\Gamma D_l h = -T_\Omega D_l h + T_\Omega P_I D_l h,$$

sillä operaattori F_Γ tuottaa aina säännöllisen funktion (Lause 5.4.4), jonka projektio säännöllisiin funktioihin on kuvaus itse. Soveltamalla Borel-Pompeiun kaavaa, ratkaisu palautuu muotoon

$$v = -h + F_\Gamma h + T_\Omega P_I D_l h.$$

Borel-Pompeiun käyttö on jälleen sallittua, koska $D_l h \in W^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega)$. Ratkaisu tarkasteltavaan yhtälöön löydetään sijoittamalla $u = v + h$, jolloin

$$u = F_\Gamma g + T_\Omega P_I D_l h \in W^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega),$$

koska funktioilla f ja g on samat reuna-arvot. Avaruus päätellään operaattorin T_Ω kuvausominaisuuksista 5.3.8, sekä siitä, että projektio P_I operoi $L^2_{\mathbb{H}}$-avaruuden sisällä. $\square$

Kootaan kahden edellisen lauseen tulokset ratkaistaksemme alkuperäisen Laplace-tehtävän.

Propositio 7.3. ([*10*, *s*.68]) *Olkoon* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *avoin ja rajoitettu joukko, jolla on sileä reunapinta. Olkoon* $f \in L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ *ja* $g \in W^{3/2,2}_{\mathbb{H}}(\Gamma)$. *Tehtävällä*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \textit{alueessa } \Omega, \\ u = g, & \textit{reunalla } \Gamma \end{cases}$$

on ratkaisu $u = F_\Gamma g + T_\Omega P_I D_l h + T_\Omega Q_I T_\Omega f \in W^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega)$, *missä funktio* h *on* $W^{2,2}_{\mathbb{H},loc}$*-jatko funktiolle* g *alueessa* Ω.

Todistus. Todistus seuraa lähteen [10, s. 68] todistusta. Tehtävä on lineaarinen, joten se voidaan purkaa osiin etsimällä ratkaisu $u = u_1 + u_2$ systeemille

$$\begin{cases} -\Delta u_1 - \Delta u_2 = f + 0, & \text{alueessa } \Omega, \\ u_1 + u_2 = 0 + g, & \text{reunalla } \Gamma, \end{cases}$$

joka voidaan ratkaista erikseen funktioille u_1 ja u_2. Funktio u_1 voidaan siten ratkaista Lauseen 7.1 mukaisesta tehtävästä homogeenisin reunaehdoin ja funktio u_2 vastaavasti ilman lähdetermiä Lauseen 7.2 tapaan. Ratkaisu on funktioiden u_1 ja u_2 summana samassa avaruudessa. $\square$

Näytetään seuraavaksi ratkaisujen yksikäsitteisyys.

Propositio 7.4. ([*10*, *s*.68]) *Laplacen reuna-arvo-ongelman ratkaisu on yksikäsitteinen.*

Todistus. Todistus mukailee lähteessä [10, s. 68] esitettyä todistusta. Olkoon kvaternifunktiot v ja w ratkaisuja Laplacen ongelmalle 7.1. Tällöin on voimassa systeemit

$$\begin{cases} -\Delta v = -\Delta w = f, & \text{alueessa } \Omega, \\ v = w = g, & \text{reunalla } \Gamma. \end{cases}$$

Vähennetään ensimmäisestä tehtävästä jälkimmäinen. Nojaamalla Laplacen operaattorin lineaarisuuteen, saadaan

$$\begin{cases} -\Delta(v - w) = 0, & \text{alueessa } \Omega, \\ v - w = 0, & \text{reunalla } \Gamma. \end{cases}$$

Merkitään $u = v - w$. On osoitettava, että funktiota u koskevalla tehtävällä on ainoastaan nollaratkaisu. Koska funktion u reuna-arvot ovat nollat, Borel-Pompeiun kaavan (Lause 5.4.3) mukaan

$$u = T_\Omega D_l u = T_\Omega P_I D_l u + T_\Omega Q_I D_l u.$$

Borel-Pompeiun käyttö on sallittua, koska Laplacen tehtävän ratkaisut ovat $W^{1,2}_{\mathbb{H}}(\Omega)$-funktioita. Koska u häviää reunalla Γ, funktio $D_l u$ kuuluu projektion Q_I kuvajoukkoon. Toisaalta koska $D_l D_l u = 0$, on $D_l u$ säännöllinen ja kuuluu projektion P_I kuvajoukkoon. Koska projektiot P ja Q jakavat avaruuden $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega)$ kahteen keskenään ortogonaaliseen aliavaruuteen, on nollafunktio ainoa funktio, joka kuuluu molempiin niistä. On siksi oltava $D_l u = 0$. Sijoittamalla uudelleen Borel-Pompeiun kaavaan, saadaan $u = T_\Omega D_l u = 0$, mikä todistaa väitteen. □

8. YHTEENVETO

Tässä työssä tarkastelimme kvaternianalyysin perusteoriaa ja sovelsimme sitä tutkiessamme Laplacen reuna-arvo-ongelmaa.

Esittelimme lyhyesti kvaternien algebran, jonka määrittelimme vektoriavaruuden käsitteen avulla. Analyysin koneistoon pääsimme käsiksi muodostamalla kvaterniarvoisia kuvauksia ja määrittelemällä niille joitakin ominaisuuksia, kuten integroituvuuden. Samalla esittelimme kvaternifunktioiden Lebesgue- ja Sobolev-avaruudet, sekä derivoituvien kvaternifunktioiden avaruudet.

Määrittelimme Dirac-derivaattaoperaattorin, jonka voidaan ajatella olevan muodollinen neliöjuuri negatiivisesta Laplacen operaattorista. Todistimme joitakin klassisia integraalikaavoja, kuten Borel-Pompeiun ja Cauchyn lauseet. Integraalikaavojen motivoimina määrittelimme kaksi integraalioperaattoria: Teodorescu-muunnoksen, sekä Cauchy-Bitsadze -operaattorin, joita tarkastelimme Lebesguen ja Sobolevin avaruuksissa. Korjasimme lähdemateriaalin määritelmää yleistetylle Dirac-operaattorille muotoilemalla kvaternisesta Gaussin lauseesta tähän tarkoitukseen sopivan mallin. Osoitimme, että tällä tavoin määritelty Dirac-operaattori on paitsi yksikäsitteinen, myös yhtäpitävä Sobolev-avaruuksissa määritellyn vastineen kanssa. Todistimme myös, että tämä operaattori on Teodorescu-muunnoksen vasen käänteisoperaattori.

Työn loppupuolella sovelsimme funktionaalianalyysin perusteoriaa neliöintegroituvien kvaternifunktioiden avaruuteen $L^2_{\mathbb{H}}$. Määrittelimme painotetun sisätulon, jonka mukaan hajotimme avaruuden $L^2_{\mathbb{H}}$ kahdeksi ortogonaaliseksi aliavaruudeksi. Hajotelmaksi saatiin lähdemateriaalista poikkeava versio, jonka motivoimina todistimme lähdekirjoissa esitellyn ortogonaalisen hajotelman vääräksi. Lähestyimme ongelmaa uudelleen tarkastelemalla sopivaa reaaliarvoista sisätuloa ja osoitimme, että tämänkin sisätulon suhteen $L^2_{\mathbb{H}}$ on Hilbert-avaruus, joka voidaan hajottaa ortogonaalihajotelmaksi. Lisäksi halutut aliavaruudet osoittautuivat ortogonaalisiksi kyseisen sisätulon suhteen. Avoimeksi kysymykseksi jäi saadaanko koko $L^2_{\mathbb{H}}$-avaruus kyseisten joukkojen summana.

Näytimme lopuksi kvaternianalyysin koneistolla, että Laplacen reuna-arvo-ongelmalla on ratkaisu ja että kyseinen ratkaisu on yksikäsitteinen.

LÄHTEET

[1] R. A. Adams, *Sobolev spaces.* Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975.

[2] R. A. Adams and J. J. Fournier, *Sobolev spaces, Second Edition.* Elsevier Ltd., 2003.

[3] H. Amann and J. Escher, *Analysis III.* Birkhäuser Verlag, 2001.

[4] F. Brackx, R. Delanghe, and F. Sommen, *Clifford Analysis.* Pitman Advanced Publishing Program, 1982.

[5] A. P. Calderón, M. Weiss, and A. Zygmund, *On the Existence of Singular Integrals - Singular Integrals, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics.* American Mathematical Society, 1967.

[6] R. Delanghe, F. Sommen, and V. Soucek, *Clifford Algebra and Spinor-Valued Functions.* Kluwer Academic Publishers, 1992.

[7] B. K. Driver, *Analysis Tools with Applications.* Springer, 2003.

[8] J. Gilbert and M. Murray, *Clifford Algebras and Dirac Operators in Harmonic Analysis.* Cambridge University Press, 1991.

[9] K. Gürlebeck, K. Habetha, and W. Sprössig, *Holomorphic Functions in the Plane and n-dimensional Space.* Birkhäuser Verlag AG, Basel, Boston, Berlin, 2008.

[10] K. Gürlebeck and W. Sprössig, *Quaternionic Analysis and Elliptic Boundary Value Problems.* Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1990.

[11] ——, *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers.* John Wiley & Sons Ltd. West Sussex, England, 1997.

[12] W. R. Hamilton, *On Quaternions, or on a New System of Imaginaries in Algebra.* Philosophical Magazine, 1844.

[13] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis With Applications.* John Wiley and Sons, 1978.

[14] J. B. Kuipers, *Quaternions and Rotation Sequences.* Princeton University Press, 2002.

[15] P. D. Lax, *Functional analysis.* John Wiley and Sons, Inc., 2002.

[16] P. Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors.* Cambridge University Press, 2011.

[17] L. E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium.* Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.

[18] S. Mikhlin, *Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations.* Pergamon Press, 1965.

[19] K. Nomizu, *Fundamentals of Linear Algebra.* McGraw-Hill Book Company, 1966.

[20] W. Rudin, *Real and Complex Analysis.* Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd., 1970.

[21] ——, *Functional Analysis.* Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd., 1979.

[22] D. J. Saltman, *Lectures on division algebras.* American Mathematical Society, 1999.

[23] D. W. Stroock, *Essentials of Integration Theory for Analysis.* Springer, 2011.

[24] D. J. Struik, *A Concise History of Mathematics, Volume II.* Dover Publications Inc., 1948.

[25] T. Sudbery, "Introduction to quaternions," *Clifford algebras and potential theory, Mekrijärvi 2002, Joensuun yliopisto, Matematiikan laitos, Raporttisarja, S.-L. Eriksson (toim.)*, no. 7, pp. 175–211, 2006.

[26] A. E. Taylor, *Introduction to Functional analysis.* John Wiley and Sons, Inc., 1967.